无散度和无旋度小波及其应用

WUSANDU HE WUXUANDU XIAOBO JIQI YINGYONG

蒋英春 著



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

无散度和无旋度小波及其应用

WUSANDU HE WUXUANDU XIAOBO JIQI YINGYONG

策　　划　田　汉
执行策划　余　婷
责任编辑　郭　婷
封面设计　红十月设计室 RED OCTOBER STUDIO TEL:13901105614
hongshiyue@vip.sina.com

ISBN 978-7-5618-4571-4



定价：18.00元

无散度和无旋度小波及其应用

蒋英春　著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据作者近年在微分方程的自适应小波方法、无散度小波和无旋度小波构造及其应用方面的研究成果编写而成，旨在简要介绍无散度和无旋度小波的基本构造思路以及在流体和电磁场计算等领域中的潜在应用．本书主要内容包括Stokes问题的自适应小波解、无散度小波与Stokes问题、区域上的HM无散度多小波、插值无旋度小波及应用、方体上插值无旋度小波及应用、矩形区域上各向异性无旋度小波等．

本书适合从事微分方程数值解，特别是流体计算和电磁场计算等相关领域的研究人员参考使用．

图书在版编目（CIP）数据

无散度和无旋度小波及其应用/蒋英春著．—天津：天津大学出版社，2012.12
ISBN 978-7-5618-4571-4

Ⅰ．①无… Ⅱ．①蒋… Ⅲ．①高等数学—高等学校 Ⅳ．①O15

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第257682号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地 址 天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电 话 发行部：022-27403647
网 址 publish. tju. edu. cn
印 刷 廊坊市长虹印刷有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm×260mm
印 张 7.25
字 数 168千
版 次 2012年12月第1版
印 次 2012年12月第1次
定 价 18.00元

前　言

自20世纪80年代中期以来，小波分析迅速发展. 基于小波分析的数值方法得到了许多学者的关注，尤其是作为自适应有限元方法的一个补充，自适应小波方法被越来越多地应用到求解算子方程的数值解上. 它包含线性问题、非线性问题以及发展类方程，即与时间变量有关的方程.

在自适应小波方法中，用来描述逼近解的小波基函数和自适应有限元方法中的网格扮演着相同的角色. 小波能够被广泛地应用到方程的数值理论中，是因为小波基可以刻画函数空间，并且用一大类算子的小波表示矩阵具有拟稀疏性质，从而具有快速算法.

为了更好地理解自适应小波方法，本书首先介绍了Stokes问题基于混合弱形式的自适应小波算法. 尽管混合弱形式的自适应算法同时得到速度和压力的自适应逼近解，但相应算子的非正定性导致许多额外计算. 另一方面，为了分析流体的流动，人们更关心Stokes问题的速度场. 鉴于速度场的无散度特点，利用无散度小波更加自然. 为此，进一步介绍了无散度小波在Stokes问题自适应小波解中的应用. 由于基于无散度小波的自适应小波方法的本质是处理椭圆算子方程，进而详细地讨论了椭圆算子方程自适应小波Galerkin方法的误差分析. 为了更好地理解无散度小波及其应用，本书还详细介绍了区域上的HM无散度多小波.

由于描述特定电磁场现象的Maxwell方程中涉及旋度算子以及无散度向量场和无旋向量场，构成了向量L^2的Helmholtz分解，并且这一分解被成功应用于计算二维和三维Navier－Stokes方程的非线性项以及流体速度场的数值模拟中. 本书的第5章和第6章主要介绍了无界和有界区域上基于Hermite样条的插值无旋度小波及其对Besov空间的刻画，同时还介绍了二维和三维空间中满足片边界条件和切向边界条件的各向异性无旋度小波.

本书的出版得到国家高技术研究发展计划（863计划）项目（2012AA011005），广西自然科学基金创新研究团队项目（2012jjGAG0001），国家自然科学基金（11201094），广西教育厅项目（201102ZD015、201012M9094、201106LX172），桂林电子科技大学学科建设经费的资助，特致感谢.

蒋英春
桂林电子科技大学
2012年6月

目　　录

第 1 章 预备知识

本章主要介绍所需的预备知识. 首先简要介绍多尺度分析与小波的基本思想. 其次, 给出无散度小波的基本原理. 最后, 简单介绍最佳逼近和 Hermite 样条的一些基本知识.

1.1 多尺度分析与小波

首先介绍小波分析的核心概念——多尺度分析（MRA）, 它由法国数学家 S. Mallat 和 Y. Meyer 在 1986 年共同提出. 它是构造小波基的基本方法.

定义 1.1.1 设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的闭子空间序列, 如果满足以下条件, 则称$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$为$L^2(\mathbf{R})$的 MRA.

（1）单调性: $V_j\subset V_{j+1}$, $j\in\mathbf{Z}$.

（2）基的存在性: 存在函数$\phi(x)\in V_0$使得$\{\phi_{0,k}(x)|k\in\mathbf{Z}\}$构成子空间$V_0$的 Riesz 基, 其中$\phi_{jk}(x)=2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-k)$, $j,k\in\mathbf{Z}$.

（3）伸缩性: $f(x)\in V_j$当且仅当$f(2x)\in V_{j+1}$, $j\in\mathbf{Z}$.

（4）逼近性: $\bigcap\limits_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$, $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbf{R})$.

这里, 函数$\phi(x)$称为尺度函数, V_j称为尺度空间.

由（3）可知, 任意两个相邻子空间之间相差一个二进分辨率. 也就是说, 只要知道任一子空间中的基, 就可通过分辨率的二进伸缩得到相邻子空间中的基. 再由（2）便可构造出所有$V_j(j\in\mathbf{Z})$中的 Riesz 基. 事实上, $\{\phi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-k)|k\in\mathbf{Z}\}$构成$V_j$空间的 Riesz 基.

因为$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$不是$L^2(\mathbf{R})$的分解, 而是单调的嵌套子空间序列, 所以不能由$V_j(j\in\mathbf{Z})$中的基来合成$L^2(\mathbf{R})$中的 Riesz 基. 因此, MRA 进一步的研究是从子空间序列$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$出发, 通过补的方法构造出$L^2(\mathbf{R})$的分解子空间序列$\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$（$V_{j+1}=V_j\dot{+}W_j$）, 即所谓的小波子空间序列. 这里$\dot{+}$代表直和, 不必是正交和, 正交和一般用$\oplus$表示. 具体的做法是从V_j的基构造出W_j的基, 然后合成全空间$L^2(\mathbf{R})$的小波基.

当 Riesz 基是特殊的标准正交基时, 上述多尺度分析称为正交多尺度分析. 由于正交小波的紧支撑性和对称性不能够兼容, 在应用上人们常选择双正交小波. $L^2(\mathbf{R})$中的一对双正交 MRA 是指其对应尺度函数满足双正交关系

$$\langle\phi,\tilde{\phi}_{0,k}\rangle=\delta_{0,k}.$$

由 MRA 的伸缩性质, 存在$\ell^2(\mathbf{Z})$中的序列$\{h_k\}$（称为低通滤波器）满足细分方程

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\phi_{1,k}(x).$$

两边同时取 Fourier 变换得 $\hat{\phi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$. 类似地, 存在 $\{\tilde{h}_k\}$ 满足

$$\tilde{\phi}(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{h}_k\tilde{\phi}_{1,k}(x), \hat{\tilde{\phi}}(2\xi)=\tilde{m}_0(\xi)\hat{\tilde{\phi}}(\xi).$$

这里,

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \mathrm{e}^{-ik\xi},\ \tilde{m}_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{h}_k \mathrm{e}^{-ik\xi}.$$

设 $\psi(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$ 分别是上述两个 MRA 对应的小波函数, 则存在 $\ell^2(\mathbf{Z})$ 中的序列 $\{g_k\}$ 和 $\{\tilde{g}_k\}$（称为高通滤波器）满足

$$\psi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\phi_{1,k}(x),\ \tilde{\psi}(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{g}_k\tilde{\phi}_{1,k}(x).$$

进一步, $\hat{\psi}(2\xi)=n_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$, $\hat{\tilde{\psi}}(2\xi)=\tilde{n}_0(\xi)\hat{\tilde{\phi}}(\xi)$. 这里,

$$n_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k \mathrm{e}^{-ik\xi},\tilde{n}_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{g}_k \mathrm{e}^{-ik\xi}.$$

而且下列双正交关系成立:

$$m_0(\xi)\overline{\tilde{m}_0(\xi)}+m_0(\xi+\pi)\overline{\tilde{m}_0(\xi+\pi)}=1,$$
$$n_0(\xi)\overline{\tilde{n}_0(\xi)}+n_0(\xi+\pi)\overline{\tilde{n}_0(\xi+\pi)}=1,$$
$$m_0(\xi)\overline{\tilde{n}_0(\xi)}+m_0(\xi+\pi)\overline{\tilde{n}_0(\xi+\pi)}=0,$$
$$n_0(\xi)\overline{\tilde{m}_0(\xi)}+n_0(\xi+\pi)\overline{\tilde{m}_0(\xi+\pi)}=0.$$

结果表明: 给定 $L^2(\mathbf{R})$ 上的双正交 MRA, 构造双正交小波的最简单方式是取

$$g_k=:(-1)^{k-1}\tilde{h}_{1-k}, \tag{1-1}$$

$$\tilde{g}_k=:(-1)^{k-1}h_{1-k}. \tag{1-2}$$

设 $f(x)\in L^2(\mathbf{R})$ 在子空间 V_j 上的投影系数为 $c_{j,k}$, 在 W_j 上的投影系数为 $d_{j,k}$. 取 j 充分大, 则 $f(x)$ 有以下的塔式分解:

$$\begin{aligned}f(x)&\approx\sum_k c_{j,k}\phi_{j,k}\\&=\sum_k d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}+\sum_k c_{j-1,k}\phi_{j-1,k}\\&=\sum_k d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}+\sum_k d_{j-2,k}\psi_{j-2,k}+\sum_k c_{j-2,k}\phi_{j-2,k}\\&=\cdots\end{aligned}$$

下面是 $L^2(\mathbf{R})$ 上的塔式分解图, 如图 1-1 所示.

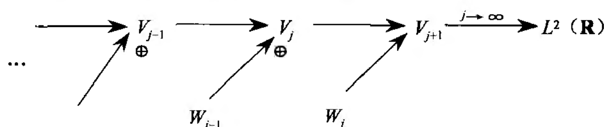


图 1-1　塔式分解图

小波的生命力在于图 1-1 所示的塔式算法有下述快速的分解与重构算法:

$$c_{j,k}=\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\tilde{h}_\ell c_{j+1,\ell+2k}=\downarrow 2(c_{j+1}*\tilde{h}')(k),\ d_{j,k}=\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\tilde{g}_\ell c_{j+1,\ell+2k}=\downarrow 2(c_{j+1}*\tilde{g}')(k);$$

$$c_{j+1,k}=\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}(h_{k-2\ell}c_{j,\ell}+g_{k-2\ell}d_{j,\ell})=(\uparrow 2c_j)*h(k)+(\uparrow 2d_j)*g(k).$$

其中, $\tilde{h}'$ 称为 $\tilde{h}$ 的镜像滤波器, 具体定义为 $\tilde{h}'(k)=\tilde{h}(-k)$.

例 1.1.1 设 ${}_N\phi$ 是 N 阶 B-样条函数, 它的 Fourier 变换由下式给出:

$${}_N\hat{\phi}(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{ik\xi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^N.$$

这里, 如果 N 是偶数, 则 $k=0$; 如果 N 是奇数, 则 $k=1$. 特别地,

$${}_1\phi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad {}_2\phi(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $\tilde{N}\geqslant 1$ 且 $N+\tilde{N}=2p$, 则 ${}_N\phi(x)$ 的对偶函数中支撑最短的是

$$({}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(x))^\wedge(\xi)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}{}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0(2^{-j}\xi).$$

这里, ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{ik\xi}{2}}\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{\tilde{N}}\sum_{n=0}^{p-1}C_{p-1+n}^n\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2n}$. 相应地双正交样条小波函数为

$${}_{N,\tilde{N}}\hat{\psi}(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{i\xi}{2}}\overline{{}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}{}_N\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

$${}_{N,\tilde{N}}\hat{\tilde{\psi}}(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{i\xi}{2}}\overline{{}_N m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}{}_{N,\tilde{N}}\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

20 世纪 90 年代中期以来, 因为其相对小的支撑和更适当的对称性, 多小波的研究引起了人们的极大兴趣. 在这里, 我们只介绍具有两个生成元的情形. MRA 的概念类似于定义 1.1.1, 不同的是要求 $\left\{\phi^1(x-n),\phi^2(x-n)\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$ 构成 V_0 的 Riesz 基. 一对 MRA 双正交是指其对应尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi^1,\phi^2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=(\tilde{\phi}^1,\tilde{\phi}^2)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\langle\phi_{0,k}^i,\tilde{\phi}_{0,n}^l\rangle=\delta_{kn}\delta_{il}$. 向量形式的细分方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{\Phi}(2x-n),\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\tilde{\boldsymbol{H}}_n\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(2x-n),$$

其中, $\boldsymbol{H}_n$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}_n$ 为 2×2 矩阵. Fourier 变换形式为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(2\xi)=\boldsymbol{H}(\xi)\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\xi),\ \hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(2\xi)=\tilde{\boldsymbol{H}}(\xi)\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\xi).$$

这里, $\boldsymbol{H}(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_n\mathrm{e}^{-in\xi}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\tilde{\boldsymbol{H}}_n\mathrm{e}^{-in\xi}$. 相应地多小波满足

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(2\xi)=\boldsymbol{F}(\xi)\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\xi),\ \hat{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}}(2\xi)=\tilde{\boldsymbol{F}}(\xi)\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\xi),$$

其中，$F(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}F_n\mathrm{e}^{in\xi}$，$\tilde{F}(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\tilde{F}_n\mathrm{e}^{in\xi}$．类似地双正交关系为

$$H(\xi)\overline{\tilde{H}(\xi)}+H(\xi+\pi)\overline{\tilde{H}(\xi+\pi)}=I,$$
$$F(\xi)\overline{\tilde{F}(\xi)}+F(\xi+\pi)\overline{\tilde{F}(\xi+\pi)}=I,$$
$$H(\xi)\overline{\tilde{F}(\xi)}+H(\xi+\pi)\overline{\tilde{F}(\xi+\pi)}=O,$$
$$F(\xi)\overline{\tilde{H}(\xi)}+F(\xi+\pi)\overline{\tilde{H}(\xi+\pi)}=O.$$

在单小波理论中，双正交小波可以通过式（1-1）和式（1-2）得到．因为矩阵乘法没有交换律，所以构造多小波没有类似于式（1-1）和式（1-2）的简单公式．设

$$\begin{aligned}f_j(x)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}^1\phi_{j,k}^1+\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}^2\phi_{j,k}^2\\&=(\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j-1,k}^1\phi_{j-1,k}^1+\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j-1,k}^2\phi_{j-1,k}^2)+(\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j-1,k}^1\psi_{j-1,k}^1+\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j-1,k}^2\psi_{j-1,k}^2).\end{aligned}$$

则下列分解重构公式成立：

$$(c_{j-1,k}^1,c_{j-1,k}^2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\tilde{H}_\ell(c_{j,\ell+2k}^1,\ c_{j,\ell+2k}^2)^{\mathrm{T}},$$
$$(d_{j-1,k}^1,d_{j-1,k}^2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\tilde{F}_\ell(c_{j,\ell+2k}^1,c_{j,\ell+2k}^2)^{\mathrm{T}},$$
$$(c_{j,k}^1,\ c_{j,k}^2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}H_{k-2\ell}^*(c_{j-1,\ell}^1,\ c_{j-1,\ell}^2)^{\mathrm{T}}+F_{k-2\ell}^*(d_{j-1,\ell}^1,\ d_{j-1,\ell}^2)^{\mathrm{T}}.$$

从一维小波出发，通过张量积方法可得到高维小波：设(ϕ_1,ψ_1)，$(\tilde{\phi}_1,\tilde{\psi}_1)$以及$(\phi_0,\psi_0)$，$(\tilde{\phi}_0,\tilde{\psi}_0)$是$L^2(\mathbf{R})$中两对双正交尺度函数和小波．记$I=\{1,2,\cdots,n\}$．对任意子集$I'\subseteq I$，定义$\varphi^{I'}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=:\prod_{v=1}^n\phi_v^{I'}(x_v)$．这里，

$$\phi_v^{I'}=\begin{cases}\phi_1,&v\in I',\\\phi_0,&v\notin I'.\end{cases}$$

则$\varphi^{I'}$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上的尺度函数．进一步，设$E_n^*=:\{0,1\}^n\setminus\{\vec{0}\}$，则得到$L^2(\mathbf{R}^n)$上的$2^n-1$个小波函数$\psi_e^{I'}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=:\prod_{v=1}^n\vartheta_{e_v,v}^{I'}(x_v)$，其中

$$\vartheta_{e_v,v}^{I'}=\begin{cases}\phi_v^{I'},&e_v=0,\\\psi_v^{I'},&e_v=1.\end{cases}$$

尺度函数和小波的对偶可以由同样的方式定义．最后，

$$\left\{\varphi_{0,k}^{I'},\ \psi_{e;j,k}^{I'}\middle|e\in E_n^*,\ j\geqslant0,k\in\mathbf{Z}^n\right\}\ \text{或}\ \left\{\psi_{e;j,k}^{I'}\middle|e\in E_n^*,\ j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}^n\right\}$$

构成$L^2(\mathbf{R}^n)$的基，其中$\psi_{e;j,k}^{I'}(x)=:2^{\frac{nj}{2}}\psi_e^{I'}(2^jx-k)$．若记$\lambda=:(e;j,k)$，则通常用符号$|\lambda|$表示对应尺度$j$.

类似地，由一维多小波通过张量积可以得到高维多小波．设$(\phi_1^+,\phi_2^+;\psi_1^+,\psi_2^+)$，$(\tilde{\phi}_1^+,\tilde{\phi}_2^+;\tilde{\psi}_1^+,\tilde{\psi}_2^+)$和$(\phi_1^-,\phi_2^-;\psi_1^-,\psi_2^-)$，$(\tilde{\phi}_1^-,\tilde{\phi}_2^-;\tilde{\psi}_1^-,\tilde{\psi}_2^-)$是$L^2(\mathbf{R})$上的两对双正交多尺度函数和多小波．令$m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)\in\{1,2\}^n$．对任意子集$I'\subseteq I$，定义$\varphi_m^{I'}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=:\prod_{v=1}^{n}\phi_{m_v,v}^{I'}(x_v)$．这里，

$$\phi_{m_v,v}^{I'}=\begin{cases}\phi_{m_v}^+, & v\in I',\\ \phi_{m_v}^-, & v\notin I'.\end{cases}$$

则$\left\{\varphi_m^{I'},\ m\in\{1,\ 2\}^n\right\}$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上的$2^n$个多尺度函数．进一步，定义

$$\psi_{e,m}^{I'}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=:\prod_{v=1}^{n}\vartheta_{e_v,m_v,v}^{I'}(x_v),$$

其中，$\vartheta_{e_v,m_v,v}^{I'}=\begin{cases}\phi_{m_v,v}^{I'}, & e_v=0,\\ \psi_{m_v,v}^{I'}, & e_v=1.\end{cases}$

那么$\left\{\psi_{e,m}^{I'},\ e\in E_n^*,\ m\in\{1,\ 2\}^n\right\}$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上的$2^n(2^n-1)$个多小波函数．多尺度函数和多小波的对偶也可类似给出．

1.2 无散度小波

无散度小波的研究始于 20 世纪 90 年代初期，当时有两种不同的构造：一种是由 Battle 和 Federbush 给出的；另一种是由 Lemarié 给出的．前者是正交小波，但不具有紧支撑；后者构造的是具有紧支撑的双正交小波，而且双正交对中只有一个满足无散度条件．同时 Lemarié 证明了二维无散度小波的正交性和紧支性不能兼容．1998 年，Lakey 和 Pereyra 将此结果推广到任意维数．从应用的角度来看，Lemarié 的工作更加值得重视，他的构造基于两对满足某种微分关系的多尺度分析，然后利用混合张量积得到双正交向量小波和无散度小波．此外，Urban 还于 1995 年讨论了非张量积无散度小波的构造方法．目前，大多数无散度小波的构造都遵循 Lemarié 的思路．它以下列事实为基础．

定理 1.2.1 设$(\phi_1,\ \psi_1)$和$(\tilde{\phi}_1,\ \tilde{\psi}_1)$是$L^2(\mathbf{R})$中一对具有紧支撑的双正交尺度函数和小波，并且$\phi_1,\ \psi_1\in H^1(\mathbf{R})$，则存在同一空间中另一对具有紧支撑的双正交尺度函数和小波$(\phi_0,\ \psi_0)$，$(\tilde{\phi}_0,\ \tilde{\psi}_0)$（其中$\tilde{\phi}_0,\ \tilde{\psi}_0\in H^1(\mathbf{R})$），满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_1(x)=\phi_0(x)-\phi_0(x-1),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\phi}_0(x)=\tilde{\phi}_1(x+1)-\tilde{\phi}_1(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_1(x)=4\psi_0(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\psi}_0(x)=-4\tilde{\psi}_1(x).$$

这里及以后，$H^1(\Omega)$表示区域$\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$上的 Sobolev 空间．具体定义为

$$H^1(\Omega)=:\left\{f\in L^2(\Omega)\,\middle|\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),i=1,\ 2,\cdots,\ n\right\},$$

其上的范数为$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2=:\|f\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$．它关于内积

$$\langle f,g\rangle_{H^1}=:(f,g)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

是一个 Hilbert 空间，其中导数是指分布意义下的导数，(f,g) 是 $L^2(\Omega)$ 中的内积.

例 1.2.1 在例 1.1.1 中，取 N 为奇数，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_N\phi(x)={}_{N-1}\phi(x)-{}_{N-1}\phi(x-1),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde\phi(x)={}_{N,\,\tilde N}\tilde\phi(x+1)-{}_{N,\,\tilde N}\tilde\phi(x);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N,\tilde N}\psi(x)=4{}_{N-1,\,\tilde N+1}\psi(x),-4{}_{N,\tilde N}\tilde\psi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde\psi(x).$$

类似地，取 N 为偶数，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_N\phi(x)={}_{N-1}\phi(x+1)-{}_{N-1}\phi(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde\phi(x)={}_{N,\tilde N}\tilde\phi(x)-{}_{N,\tilde N}\tilde\phi(x-1);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N,\tilde N}\psi(x)=-4{}_{N-1,\,\tilde N+1}\psi(x),\ 4{}_{N,\tilde N}\tilde\psi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde\psi(x).$$

证明 只证明 N 为奇数的情形，N 为偶数类似可证.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_N\phi(x)\right)^{\wedge}(\xi)=i\xi{}_N\hat\phi(\xi)=i\xi\mathrm{e}^{\frac{i\xi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^N,$$

$$\begin{aligned}({}_{N-1}\phi(x)-{}_{N-1}\phi(x-1))^{\wedge}(\xi)&=(1-\mathrm{e}^{-i\xi}){}_{N-1}\hat\phi(\xi)\\&=2i\mathrm{e}^{\frac{i\xi}{2}}\sin\frac{\xi}{2}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^{N-1}=i\xi\mathrm{e}^{-\frac{i\xi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^{N}.\end{aligned}$$

在$\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_N\phi(x)\right)^{\wedge}(\xi)=({}_{N-1}\phi(x)-{}_{N-1}\phi(x))^{\wedge}(\xi)$的两端同时取逆 Fourier 变换可得第一个等式. 下证第二个等式:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde\phi(x)\right)^{\wedge}(\xi)&=i\xi({}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde\phi(x))^{\wedge}(\xi)=i\xi(2\pi)^{-\frac12}\prod_{j=1}^{\infty}{}_{N-1,\,\tilde N+1}\tilde m_0(2^{-j}\xi)\\&=i\xi(2\pi)^{\frac12}\prod_{j=1}^{\infty}\left[\left(\cos\frac{2^{-j}\xi}{2}\right)^{\tilde N+1}\sum_{n=0}^{\frac{N+\tilde N}{2}-1}\mathrm{C}_{\frac{N+\tilde N}{2}-1+n}^{n}\left(\sin\frac{2^{-j}\xi}{2}\right)^{2n}\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}({}_{N,\tilde N}\tilde\phi(x+1)-{}_{N,\tilde N}\tilde\phi(x))^{\wedge}(\xi)&=(\mathrm{e}^{i\xi}-1)({}_{N,\tilde N}\tilde\phi(x))^{\wedge}(\xi)=(\mathrm{e}^{i\xi}-1)(2\pi)^{\frac12}\prod_{j=1}^{\infty}{}_{N,\tilde N}\tilde m_0(2^{-j}\xi)\\&=(\mathrm{e}^{i\xi}-1)(2\pi)^{\frac12}\prod_{j=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i2^{-j}\xi}{2}}\left(\cos\frac{2^{-j}\xi}{2}\right)^{\tilde N}\sum_{n=0}^{\frac{N+\tilde N}{2}-1}\mathrm{C}_{\frac{N+\tilde N}{2}-1+n}^{n}\left(\sin\frac{2^{-j}\xi}{2}\right)^{2n}\right].\end{aligned}$$

只须验证

$$(e^{i\xi}-1)\prod_{j=1}^{\infty} e^{\frac{i2^{-j}\xi}{2}} = i\xi\prod_{j=1}^{\infty}\cos\frac{2^{-j}\xi}{2}.$$

事实上，$(e^{i\xi}-1)\prod_{j=1}^{\infty} e^{\frac{i2^{-j}\xi}{2}} = (e^{i\xi}-1)\ e^{\frac{i\xi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}} = (e^{i\xi}-1)\ e^{-\frac{i\xi}{2}} = 2i\sin\frac{\xi}{2}$. 因为 $\prod_{j=1}^{\infty}\cos\frac{2^{-j}\xi}{2} = \frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}$，所以 $i\xi\prod_{j=1}^{\infty}\cos\frac{2^{-j}\xi}{2} = 2i\sin\frac{\xi}{2}$. 第二个等式得证. 注意到

$$\left(\frac{d}{dx}{}_{N,\tilde N}\psi(x)\right)^{\wedge}(\xi) = i\xi\,{}_{N,\tilde N}\hat\psi(\xi) = i\xi e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{{}_{N,\tilde N}\tilde m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\,{}_{N}\hat\phi\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$= i\xi e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\tilde N}\sum_{n=0}^{\frac{N+\tilde N}{2}-1} C^{n}_{\frac{N+\tilde N}{2}-1+n}\left(\sin\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{2n}}\, e^{-\frac{i\xi}{4}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{4}}{\frac{\xi}{4}}\right)^{N}.$$

另一方面，

$${}_{N-1,\ \tilde N+1}\hat\psi(\xi) = e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{{}_{N-1,\ \tilde N+1}\tilde m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\,{}_{N-1}\hat\phi\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$= e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{\left(\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\tilde N+1}\sum_{n=0}^{\frac{N+\tilde N}{2}-1} C^{n}_{\frac{N+\tilde N}{2}-1+n}\left(\sin\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{2n}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{4}}{\frac{\xi}{4}}\right)^{N-1}.$$

因此，只须证明

$$i\xi e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}e^{-\frac{i\xi}{4}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{4}}{\frac{\xi}{4}}\right) = 4\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right).$$

事实上，$i\xi e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}e^{-\frac{i\xi}{4}}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{4}}{\frac{\xi}{4}}\right) = -4\sin\frac{\xi}{4} = 4\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$. 第三个等式成立. 下面证明最后一个等式：

$$\left(\frac{d}{dx}{}_{N-1,\ \tilde N+1}\tilde\psi(x)\right)^{\wedge}(\xi) = i\xi\,{}_{N-1,\ \tilde N+1}\hat{\tilde\psi}(\xi) = i\xi e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{{}_{N-1}m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\,{}_{N-1,\ \tilde N+1}\hat{\tilde\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$= i\xi e^{\frac{i\xi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{N-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}{}_{N-1,\ \tilde N+1}\tilde m_0\left(\frac{2^{-j}\xi}{2}\right)$$

$$=i\xi e^{\frac{i\xi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{N-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}\left(\cos\frac{2^{-j}\xi}{4}\right)^{\tilde{N}+1}\sum_{n=0}^{\frac{N+\tilde{N}}{2}-1}\mathrm{C}_{\frac{N+\tilde{N}}{2}-1+n}^{n}\left(\sin\frac{2^{-j}\xi}{4}\right)^{2n}.$$

另一方面，有

$${}_{N,\tilde{N}}\hat{\tilde{\psi}}(\xi)=e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{{}_{N}m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\,{}_{N,\tilde{N}}\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\xi}{2}\right)=e^{\frac{i\xi}{2}}\overline{e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{N}}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}{}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0\left(\frac{2^{-j}\xi}{2}\right)$$

$$=e^{\frac{i\xi}{2}}e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{N}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}e^{-\frac{i2^{-j}\xi}{4}}\left(\cos\frac{2^{-j}\xi}{4}\right)^{\tilde{N}}\sum_{n=0}^{\frac{N+\tilde{N}}{2}-1}\mathrm{C}_{\frac{N+\tilde{N}}{2}-1+n}^{n}\left(\sin\frac{2^{-j}\xi}{4}\right)^{2n}.$$

因此，只须验证

$$i\xi\prod_{j=1}^{\infty}\cos\frac{2^{-j}\xi}{4}=-4e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\prod_{j=1}^{\infty}e^{-\frac{i2^{-j}\xi}{4}}.$$

事实上，$i\xi\prod_{j=1}^{\infty}\cos\frac{2^{-j}\xi}{4}=4i\sin\frac{\xi}{4}$，$-4e^{i\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\xi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\prod_{j=1}^{\infty}e^{-\frac{i2^{-j}\xi}{4}}=4i\sin\frac{\xi}{4}$.

由定理 1.2.1 中的两对双正交小波做张量积可以得到 $L^2(\mathbf{R}^n)^n$ 中的 n 个双正交向量尺度函数

$$\vec{\varphi}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=:\varphi^{\{i\}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ \delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$$

和 $n(2^n-1)$ 个小波函数

$$\vec{\psi}_{e,i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)=:\psi_e^{\{i\}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ \delta_i,\ e\in E_n^*,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

因为 $e\in E_n^*$，所以存在 $i_e\in\{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $e_{i_e}=1$. 进一步，定义 $(n-1)(2^n-1)$ 个无散度小波函数

$$\vec{\psi}_{e,i}^{\nabla}=:\psi_e^{\{i\}}\delta_i-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_e^{\{i,\ i_e\}}\delta_{i_e},\ e\in E_n^*,\ i\neq i_e.$$

容易看出其对偶为 $\tilde{\vec{\psi}}_{e,i}^{\nabla}=\tilde{\psi}_e^{\{i\}}\delta_i$, $e\in E_n^*$, $i\neq i_e$.

注意到这些小波均定义在全空间 $\mathbf{R}^n$ 上，而在实际应用中需要的是区域上的无散度小波. 设 $I'\subseteq I$, $S_j=S(\Phi_j^{I'})=\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\left\{\varphi_\lambda^{I'}\middle|\lambda\in I_j\right\}$ 和 $\tilde{S}_j=S(\tilde{\Phi}_j^{I'})=\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\left\{\tilde{\varphi}_\lambda^{I'}\middle|\lambda\in I_j\right\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的紧支对偶多尺度分析，其中 I_j 表示尺度函数的子标集. 对应的双正交小波空间是 $W_j=S(\Psi_j^{I'})=\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\left\{\psi_\lambda^{I'}\middle|\lambda\in J_j\right\}$ 和 $\tilde{W}_j=S(\tilde{\Psi}_j^{I'})=\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{I'}\middle|\lambda\in J_j\right\}$. 这里 $J_j=\left\{(j, e, k)\middle|e\in E_n^*, k\in J_{j,e}\right\}$ 表示小波函数的子标集. 进一步假设，对任意 $e\in E_n^*$，存在 $i_e\in\{1, 2,\cdots, n\}$ 和 $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$，使得

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_e}}\psi_{j,e,k}^{\{i_e\}}=2^j\alpha\psi_{j,e,k}^{\varnothing},\tag{1-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_e}}\psi_{j,e,k}^{\{i,i_e\}}=2^j\alpha\psi_{j,e,k}^{\{i\}},\tag{1-4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_{j,e,k}^{\{i,i_e\}}=2^j\sum_{k'\in\Lambda_k}\alpha_{k'}\ \psi_{j,e,k'}^{\{i_e\}},\ i\neq i_e\tag{1-5}$$

成立，其中$\#\Lambda_k \leqslant C$且$\sum_{k'\in\Lambda_k}|\alpha_{k'}|\leqslant C$，$C$是不依赖于$(i,\ j,\ e,\ k)$的常数.

对$\vec{I}_j=:\{1,\ \cdots,\ n\}\times I_j$和$\vec{J}_j=:\{1,\ \cdots,\ n\}\times J_j$，定义

$$\vec{\varphi}_\lambda=:\vec{\varphi}_{i,j,k}=\varphi_{j,k}^{\{i\}}\delta_i,\ \vec{\psi}_\lambda=:\vec{\psi}_{i,j,e,k}=\psi_{j,e,k}^{\{i\}}\delta_i.$$

令$\nabla=:\vec{I}_0\cup\left(\bigcup_{j\geqslant 0}\vec{J}_j\right)$和$\vec{\psi}_\lambda=:\vec{\varphi}_\lambda,\ \lambda\in\vec{I}_0$．则$\vec{\Psi}=:\{\vec{\psi}_\lambda\,|\,\lambda\in\nabla\}$和$\tilde{\vec{\Psi}}=:\left\{\tilde{\vec{\psi}}_\lambda\middle|\lambda\in\nabla\right\}$构成$L^2(\Omega)^n$的双正交小波基．进一步，从参考文献[24]和参考文献[25]可知

$$2^{(|\lambda'|+|\lambda|)}\left|(\nabla\vec{\psi}_{\lambda'},\ \nabla\vec{\psi}_\lambda)\right|\lesssim 2^{-||\lambda|-|\lambda'||\sigma}(1+d(\lambda,\ \lambda'))^{-\beta},\tag{1-6}$$

这里$\sigma>\dfrac{n}{2}$，$\beta>n$, $d(\lambda,\ \lambda')=:2^{\min(|\lambda|,|\lambda'|)}\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\vec{\psi}_\lambda,\operatorname{supp}\vec{\psi}_{\lambda'})$，对向量$\vec{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$\nabla\vec{u}=(\nabla u_1,\nabla u_2,\cdots,\nabla u_n)$，且$(\nabla\vec{u},\nabla\vec{v})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j},\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$，其中“$\nabla$”表示梯度算子．令

$$\nabla^{df}=:\left\{(i,j,e,k)\,|\,j\geqslant 0,e\in E_n^*,i\neq i_e,k\in J_{j,e}\right\}.$$

对任意的$\bar{\lambda}=(i,j,e,k)\in\nabla^{df}$，无散度小波为

$$\vec{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}:=\psi_{j,e,k}^{\{i\}}\delta_i-\frac{1}{\alpha}\cdot 2^{\ j}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_{j,e,k}^{\{i,i_e\}}\delta_{x_{i_e}}.\tag{1-7}$$

定义$H^0(\mathrm{div};\Omega)=:\left\{\vec{\xi}\in L^2(\Omega)^n\,|\,\mathrm{div}\vec{\xi}=0\right\}$，$H_0(\mathrm{div};\Omega)=:\mathrm{clos}_{H(\mathrm{div};\Omega)}C_0^\infty(\Omega)^n$.

这里，$\left\|\vec{\xi}\right\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}^2=:\left\|\vec{\xi}\right\|_{L^2(\Omega)^n}^2+\left\|\mathrm{div}\vec{\xi}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$．进一步，记

$$H_0^0(\mathrm{div};\Omega)=:H_0(\mathrm{div};\Omega)\cap H^0(\mathrm{div};\Omega).$$

则下列结果成立.

定理 1.2.2 无散度小波系$\Psi^{df}=:\left\{\vec{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}\,|\,\bar{\lambda}\in\nabla^{df}\right\}$构成$H_0^0(\mathrm{div};\Omega)$的 Riesz 基，且

$$\left\|\sum_{\bar{\lambda}\in\nabla^{df}}c_\lambda\vec{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}\right\|H^1(\Omega)^n\sim\sum_{\bar{\lambda}\in\nabla^{df}}2^{2|\bar{\lambda}|}\left|c_\lambda\right|^2.$$

进一步，令$\bar{\nabla}=:\bigcup_{j\geqslant 0}J_j$．对$\lambda=(j,e,k)\in\bar{\nabla}$，定义

$$\vec{\psi}_\lambda^\Delta=:\psi_\lambda^{\{i_e\}}\delta_{i_e}\tag{1-8}$$

和$H^\Delta(\Omega)=:S(\vec{\Psi}^\Delta)$，则$H_0(\mathrm{div};\Omega)=H_0^0(\mathrm{div};\Omega)\oplus H^\Delta(\Omega)$.

1.3 ℓ_τ^ω与最佳N-项逼近

衡量非线性逼近优劣的标准是最佳N-项逼近．为此引入离散空间ℓ_τ^ω．设$0<\tau<2$, $\ell_\tau^\omega(\nabla)$表示所有$\bar{v}\in\ell^2(\nabla)$，满足

$$|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}=:\sup_{n\geqslant 1}n^{\frac{1}{\tau}}\bar{v}_n^*<\infty,$$

其中，$\overline{v}^*$ 是$|\overline{v}|$的递减重排．定义$\|\overline{v}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} =: |\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} + \|\overline{v}\|_{\ell^2(\nabla)}$，则容易验证下述结论．

性质 1.3.1 （1） $\ell^\tau(\nabla) \subseteq \ell_\tau^\omega(\nabla)$ 且$|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \leqslant \|\overline{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$．

（2）对 $\tau \in (0, 2)$, $\ell^\tau(\nabla) \subset \ell^2(\nabla)$ 且$\|\overline{v}\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant \|\overline{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$．

（3） $\overline{v} \in \ell_\tau^\omega(\nabla)$ 等价于 $\#\left\{\lambda \in \nabla \| \overline{v}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant C\varepsilon^{-\tau}$，且最小的常数 C 等于$|\overline{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}$．

（4）设 $\overline{v}$, $\overline{\omega} \in \ell_\tau^\omega(\nabla)$，则$\|\overline{v} + \overline{\omega}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \leqslant \max\{2, 2^{\frac{1}{\tau}}\}(\|\overline{v}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} + \|\overline{\omega}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)})$．

证明 注意到 $n(\overline{v}_n^*)^\tau \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{v}_n^*|^\tau$，则 $|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \leqslant \|\overline{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$．

下面证明（2），只须证明

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |\overline{v}_n^*|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |\overline{v}_n^*|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}},\ \forall 0<\tau<2, N>0.$$

令 $f(\tau) = \left(\sum_{n=1}^{N} |\overline{v}_n^*|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}}$，只须证明 $f(\tau)$ 是递减的．因为

$$f(\tau) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}\ln\left(\sum_{n=1}^{N}|\overline{v}_n^*|^\tau\right)},$$

所以只须证明$\frac{1}{\tau}\ln\left(\sum_{n=1}^{N}|\overline{v}_n^*|^\tau\right)$是递减的．事实上，

$$\frac{1}{\tau}\ln\left(\sum_{n=1}^{N}|\overline{v}_n^*|^\tau\right) = \frac{1}{\tau}\ln|\overline{v}_1^*|^\tau \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{|\overline{v}_n^*|}{|\overline{v}_1^*|}\right)^\tau = \ln|\overline{v}_1^*| + \frac{1}{\tau}\ln\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{|\overline{v}_n^*|}{|\overline{v}_1^*|}\right)^\tau.$$

因为$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{|\overline{v}_n^*|}{|\overline{v}_1^*|}\right)^\tau = 1 + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{|\overline{v}_n^*|}{|\overline{v}_1^*|}\right)^\tau$ 是递减的，所以 $\ln\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{|\overline{v}_n^*|}{|\overline{v}_1^*|}\right)^\tau > 0$ 且递减．因此，$\frac{1}{\tau}\ln\left(\sum_{n=1}^{N}|\overline{v}_n^*|^\tau\right)$ 是递减的．

证明（3），如果 $\sup_{n\geqslant 1} n^{\frac{1}{\tau}}\overline{v}_n^* < \infty$，则

$$\#\left\{\lambda \in \nabla \| \overline{v}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\}\varepsilon^\tau \leqslant n(\overline{v}_n^*)^\tau \leqslant \left(\sup_{n\geqslant 1} n^{\frac{1}{\tau}}\overline{v}_n^*\right)^\tau =: |\overline{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}.$$

因此

$$\#\left\{\lambda \in \nabla \| \overline{v}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant |\overline{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\varepsilon^{-\tau}.$$

如果 $\#\left\{\lambda \in \nabla \| \overline{v}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant C\varepsilon^{-\tau}$，取 $\varepsilon = \overline{v}_n^*$，则

$$(\overline{v}_n^*)^\tau \#\left\{\lambda \in \nabla \| \overline{v}_\lambda| \geqslant \overline{v}_n^*\right\} \leqslant C.$$

因为 $\#\left\{\lambda \in \nabla \| \overline{v}_\lambda| \geqslant \overline{v}_n^*\right\} \geqslant n$，所以 $n(\overline{v}_n^*)^\tau \leqslant C$．进一步

$$|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} =: \sup_{n\geqslant 1} n^{\frac{1}{\tau}} \bar{v}_n^* \leqslant (C)^{\frac{1}{\tau}}.$$

（4）由性质（3），有

$$\#\left\{\lambda\in\nabla \| \bar{v}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant |\bar{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\ \varepsilon^{-\tau},$$

$$\#\left\{\lambda\in\nabla \| \bar{\omega}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant |\bar{\omega}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\ \varepsilon^{-\tau}.$$

而且

$$\#\left\{\lambda\in\nabla \| \bar{v}_\lambda+\bar{\omega}_\lambda| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \#\left\{\lambda\in\nabla \| \bar{v}_\lambda| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \#\left\{\lambda\in\nabla \| \bar{\omega}_\lambda| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$\leqslant 2^\tau\left(|\bar{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} + |\bar{\omega}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\right)\ \varepsilon^{-\tau}.$$

因此

$$|\bar{v}+\bar{\omega}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \leqslant 2^\tau\left(|\bar{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} + |\bar{\omega}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\right).$$

因为对$0<\tau<1$和$a,b>0$，$(a^\tau+b^\tau)^{\frac{1}{\tau}} \leqslant 2^{\frac{1-\tau}{\tau}}(a+b)$，所以

$$|\bar{v}+\bar{\omega}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \leqslant \max\{2,\ 2^{\frac{1}{\tau}}\}\left(|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} + |\bar{\omega}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\right).$$

最后，由定义得

$$\|\bar{v}+\bar{\omega}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \leqslant \max\{2,\ 2^{\frac{1}{\tau}}\}\left(\|\bar{v}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} + \|\bar{\omega}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\right).$$

对$\bar{v}\in\ell^2(\nabla)$，最佳N—项逼近误差定义为

$$\sigma_N(\bar{v}) =: \inf_{\#(\mathrm{supp}\ z)\leqslant N} \|\bar{v}-z\|_{\ell^2(\nabla)}.$$

下面的结论取自参考文献[26].

定理 1.3.1　设$s>0$，$\frac{1}{\tau}=:s+\frac{1}{2}$，则$\bar{v}\in\ell_\tau^\omega(\nabla)\Leftrightarrow\sigma_N(\bar{v})\leqslant CN^{-s}$.

注记 1.3.1　上述估计可进一步量化．事实上，

$$\sigma_N^2(\bar{v}) = \|\bar{v}-\bar{v}_N\|^2_{\ell^2(\nabla)} = \sum_{k>N}\left|\bar{v}_k^*\right|^2 = \sum_{k>N}\left(k^{\frac{1}{\tau}}\left|\bar{v}_k^*\right|\right)^2 k^{-\frac{2}{\tau}}$$

$$\leqslant |\bar{v}|^2_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \int_N^\infty x^{-\frac{2}{\tau}}\mathrm{d}x = |\bar{v}|^2_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} \frac{\tau}{2-\tau} N^{-2s}.$$

因此，若$\bar{v}\in\ell_\tau^\omega(\nabla)$，则$\sigma_N(\bar{v})\leqslant C_\tau|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N^{-s}$，其中$C_\tau=\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2-\tau}}$.

1.4　Hermite 样条及其性质

Hermite 样条是研究小波分析的重要工具，本小节介绍其定义和基本性质．令ξ_1^+和ξ_2^+表

示两个 3 次 Hermite 样条:

$$\xi_1^+(x)=:(1-3x^2-2x^3)\,\chi_{[-1,0)}(x)+(1-3x^2+2x^3)\,\chi_{[0,1)}(x),$$

$$\xi_2^+(x)=:(x+2x^2+x^3)\,\chi_{[-1,0)}(x)+(x-2x^2+x^3)\,\chi_{[0,1)}(x).$$

容易验证 $\xi_m^+(m=1,2)$ 是连续可微的，而且

$$\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}\xi_m^+(k)=\delta_{k,0}\delta_{m-1,\nu},\ k\in\mathbf{Z},\ \nu\in\{0,1\},\ m\in\{1,2\}.$$

类似地，两个 2 次 Hermite 样条为

$$\xi_1^-(x)=:(-6x-6x^2)\,\chi_{[-1,0]},$$

$$\xi_2^-(x)=:(1+4x+3x^2)\,\chi_{[-1,0]}+(1-4x+3x^2)\,\chi_{[0,1)}(x).$$

显然，ξ_m^- 是连续的．进一步，

$$\xi_m^-(k)=\delta_{k,0}\delta_{m,2},\ \int_{k-1}^{k}\xi_m^-(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{k,0}\delta_{m,1},\ k\in\mathbf{Z},\ m\in\{1,2\}.$$

最重要的性质是 ξ_m^+ 和 ξ_m^- 之间的微分关系:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_1^+(x)=\xi_1^-(x)-\xi_1^-(x-1), \tag{1-9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_2^+(x)=\xi_2^-(x). \tag{1-10}$$

定义 $V_j^\pm=:\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\{\xi_{m;j,k}^\pm\mid m\in\{1,2\},\ k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\{V_j^\pm\}$ 为 $L^2(\mathbf{R})$ 中的两个 MRA，且 $V_j^\pm$ 在 $V_{j+1}^\pm$ 中的直交补为 $W_j^\pm=:\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\{\eta_{m;j,k}^\pm\mid m\in\{1,2\},k\in\mathbf{Z}\}$，其中 $\eta_m^+(\cdot)=:\xi_m^+(2\cdot-1)$，$m=1,2$；$\eta_1^-(\cdot)=:\xi_1^-(2\cdot-1)-\xi_1^-(2\cdot-2)$；$\eta_2^-(\cdot)=:\xi_2^-(2\cdot-1)$，这里的伸缩平移是指 $\eta_{j,k}(\cdot)=\eta(2^j\cdot-k)$．容易验证微分关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta_m^+(x)=2\eta_m^-(x) \tag{1-11}$$

以及插值性质

$$\eta_m^-\left(\frac{k}{2}\right)=\delta_{k,1}\delta_{m,2},\ \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\eta_m^-(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\delta_{m,1}(\delta_{k,0}-\delta_{k,1}),$$

$$\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}\eta_m^+\left(\frac{k}{2}\right)=2^\nu\delta_{k,1}\delta_{m-1,\nu},\ \nu\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}.$$

为得到双正交分解，Bittner和Urban利用广义函数引入它们的对偶:

$$\tilde{\xi}_1^+=\delta_0,\ \tilde{\xi}_2^+=-\delta_0',\ \tilde{\xi}_1^-=\chi_{[-1,0)},\ \tilde{\xi}_2^-=\delta_0;$$

$$\tilde{\eta}_1^+=:\delta_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\delta_0-\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{8}\delta_0'-\frac{1}{8}\delta_1',\ \tilde{\eta}_2^+=:\frac{3}{4}\delta_0-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}'-\frac{1}{8}\delta_0'-\frac{1}{8}\delta_1';$$

$$\tilde{\eta}_1^-=:\chi_{[0,\frac{1}{2}]}-\chi_{[\frac{1}{2},1]}-\frac{1}{4}\delta_0+\frac{1}{4}\delta_1,\ \tilde{\eta}_2^-=:\delta_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\delta_0+\frac{1}{4}\delta_1-\frac{3}{2}\chi_{[0,1]}.$$

对应式（1-9）、式（1-10）和式（1-11），它们的对偶 $\tilde{\xi}_m^\pm$ 和 $\tilde{\eta}_m^\pm$ 满足下列微分关系:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_1^- = \tilde{\xi}_1^+(\cdot+1) - \tilde{\xi}_1^+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_2^- = -\tilde{\xi}_2^+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\eta}_m^- = -2\tilde{\eta}_m^+,\ m=1,\ 2. \tag{1-12}$$

为引入高维小波，对 $I'\subseteq I=:\{1,\ 2,\ 3\}$，记

$$\xi_{\mu,\nu}^{I'}=:\begin{cases}\xi_\mu^+,\ \nu\in I',\\ \xi_\mu^-,\ \nu\notin I'\end{cases} \text{ 和 } \vartheta_{\ell,\mu,\nu}^{I'}=:\begin{cases}\xi_{\mu,\nu}^{I'},\ \ell=0,\\ \eta_{\mu,\nu}^{I'},\ \ell=1.\end{cases}$$

则 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 中的张量积尺度函数和小波分别为

$$\phi_m^{I'}(x_1,x_2,x_3)=\prod_{\nu=1}^{3}\xi_{m_\nu,\nu}^{I'}(x_\nu) \text{ 和 } \psi_{e,m}^{I'}(x_1,\ x_2,\ x_3)=\prod_{\nu=1}^{3}\vartheta_{e_\nu,m_\nu,\nu}^{I'}(x_\nu),$$

其中，$e\in E_3^*=:\{0,\ 1\}^3\setminus\{\vec{0}\}$，$m=(m_1,\ m_2,\ m_3)\in\{1,\ 2\}^3$.

定义 Hermite 内插公式：$\Lambda_j^{I'}f=:\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^3}\sum\limits_{m\in\{1,2\}^3}\left\langle f,\tilde{\phi}_{m;\,j,\,k}^{I'}\right\rangle\phi_{m;\,j,k}^{I'}$，则

$$\left\langle\Lambda_j^{I'}f,\tilde{\phi}_{m;\,j,k}^{I'}\right\rangle=\left\langle f,\tilde{\phi}_{m;\,j,k}^{I'}\right\rangle,\ \frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_j^{I'}f=\Lambda_j^{I'\setminus\{i\}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right),\ i\in I'.$$

这里 $\left\langle f,\ \xi_{m;\,j,k}^{\pm}\right\rangle=:\left\langle f\left(\frac{\cdot+k}{2^j}\right),\ \tilde{\xi}_m^{\pm}\right\rangle$，类似地定义 $\left\langle f,\tilde{\eta}_{m;\,j,k}^{\pm}\right\rangle$. 我们还要用到对偶小波的个消失矩性质：设 $\prod_2$ 表示次数不超过 2 的多项式全体，则当 $P\in\prod_2$ 时，$\left\langle P,\tilde{\eta}_m^{\pm}\right\rangle=0$.

第 2 章　Stokes 问题的自适应小波解

在本章，首先给出Stokes问题混合弱形式的一种相对简单的Richardson迭代方法，然后引入算子的精确应用并设计适当的迭代算法，最后给出算法的误差估计和计算复杂度分析.

2.1　自适应小波方法与Stokes问题

第一个自适应小波方法由Dahlke等人首先研究出来，它保证了不同层次的逼近误差以固定常数倍减少，从而保证了逼近的收敛性．这已经较自适应有限元方法前进了一步，然而却没有给出逼近误差关于自由度的衰减速度．2001年，Cohen, Dahmen和DeVore在参考文献[48]中首先分析了上述自适应方法的逼近误差关于自由度的指数衰减速度；由于指数的变化范围很小，他们构造了另一种自适应小波Galerkin方法，其指数衰减的范围完全由所选择小波基的光滑性和消失矩决定．同年，三位作者又在参考文献[53]中针对一般的算子方程组（包括椭圆算子方程和Stokes问题）构造了自适应小波方法并分析了其指数衰减速度．与此同时，Dahlke, Dahmen和Urban在参考文献[55]中针对鞍点问题构造了一种自适应小波方法并分析了其指数衰减速度，并以Stokes问题为特例，通过引入散度算子的精确应用优化了前期工作.

Stokes问题是流体力学中最简单的数学模型，它可描述黏性不可压缩流体的流动．设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为有界连通具有Lipschitz边界的区域，本文关心的Stokes问题为

$$\begin{cases}-\Delta\vec{u}+\nabla p=\vec{f},\\ \operatorname{div}\vec{u}=0,\\ \vec{u}\big|_{\partial\Omega}=0,\ \int_{\Omega}p(x)\,\mathrm{d}x=0.\end{cases}\tag{2-1}$$

这里 $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$ 代表速度，p代表压强．无散度条件 $\operatorname{div}\vec{u}=0$ 表示流体的不可压缩性，$\vec{u}\big|_{\partial\Omega}=0$ 描述的是黏性流体在边界上的无滑移条件，而 $\int_{\Omega}p(x)\,\mathrm{d}x=0$ 表示流体所受的合外力为零.

研究Stokes问题的自适应小波解一般都考虑其混合弱形式，即对任意的 $\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)\in H_0^1(\Omega)^n=:X$ 和 $q\in L_0^2(\Omega)=:\left\{v\in L^2(\Omega):\int_{\Omega}v(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}=:M$，讨论下述方程:

$$\begin{cases}(\nabla\vec{u},\nabla\vec{v})-(p,\operatorname{div}\vec{v})=\left\langle\vec{f},\vec{v}\right\rangle,\\ (\operatorname{div}\vec{u},q)=0,\\ \vec{u}\big|_{\partial\Omega}=0,\ \int_{\Omega}p(x)\,\mathrm{d}x=0.\end{cases}\tag{2-2}$$

这里，$H_0^1(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的完备化，即 $H_0^1(\Omega)=:\operatorname{clos}_{H^1}C_0^\infty(\Omega)$; $H^{-1}(\Omega)$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 上所有有界线性泛函的全体；$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示Sobolev空间 $H_0^1(\Omega)^n$ 和 $H^{-1}(\Omega)^n$ 之间的对偶积，

而$(\cdot,\cdot)$表示通常的内积．设$\vec{u},\vec{v}\in X$及$p\in M$，记

$$a(\vec{u},\ \vec{v})=:(\nabla\vec{u},\ \nabla\vec{v})=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x\ ,$$

$$b(p,\ \vec{v})=:-(p,\ \operatorname{div}\ \vec{v})\ .$$

容易验证$a(\cdot,\cdot)$是Hilbert空间$X\times X$上的有界双线性形式，即$|a(\vec{u},\ \vec{v})|\leqslant C\|\vec{u}\|_X\|\vec{v}\|_X$．因此，存在有界线性算子$\boldsymbol{A}:X\to X^*$使得$a(\vec{u},\vec{v})=\langle\vec{u},\boldsymbol{A}\vec{v}\rangle$.进一步，由Sobolev不等式可以证明$a(\cdot,\cdot)$还是正定的，即存在$\theta>0$使得$a(\vec{v},\vec{v})\geqslant\theta\|\vec{v}\|_X^2$．类似地，因为$b(p,\vec{v})$是$M\times X$上的有界双线性形式，即$|b(p,\vec{v})|\leqslant C\|p\|_M\|\vec{v}\|_X$，所以存在有界线性算子$\boldsymbol{B}:X\to M^*$使得$b(p,\ \vec{v})=\langle p,\ \boldsymbol{B}\vec{v}\rangle$．最后，式（2-2）等价于算子方程组

$$\boldsymbol{LU}=:\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{f}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=:\boldsymbol{F}. \tag{2-3}$$

并且式（2-3）是适定的，即存在常数$0<c\leqslant C$使得

$$c\|\boldsymbol{U}\|_{X\times M}\leqslant\|\boldsymbol{LU}\|_{X^*\times M^*}\leqslant C\|\boldsymbol{U}\|_{X\times M}.$$

通过选择速度空间和压力空间中两组适当的双正交小波基可对式（2-3）进行离散化：设$\Psi_X=\left\{\vec{\psi}_{\lambda_X},\ \lambda_X\in J_X\right\}\subseteq X$和$\tilde{\Psi}_X=\left\{\vec{\tilde{\psi}}_{\lambda_X},\lambda_X\in J_X\right\}$是$L^2(\Omega)^n$中的双正交小波基．$\Psi_M=\{\psi_{\lambda_M},\ \lambda_M\in J_M\}$和$\tilde{\Psi}_M=\left\{\tilde{\psi}_{\lambda_M},\lambda_M\in J_M\right\}$是$L^2(\Omega)$中的双正交小波基．小波基能够刻画函数空间是指：对任意的$\vec{u}\in X$和$p\in M$，存在$\overline{u}\in\ell^2(J_X)$和$\overline{p}\in\ell^2(J_M)$使得$\vec{u}=\overline{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X^{-1}\Psi_X$，$p=\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M$，且

$$c_1\|\overline{u}\|_{\ell^2(J_X)}\leqslant\|\vec{u}\|_X\leqslant C_1\|\overline{u}\|_{\ell^2(J_X)},\ c_2\|\overline{p}\|_{\ell^2(J_M)}\leqslant\|p\|_M\leqslant C_2\|\overline{p}\|_{\ell^2(J_M)},$$

其中，$\boldsymbol{D}_X=:(2^{|\lambda_X|}\delta_{\lambda_X,\ \lambda'_X})_{\lambda_X,\ \lambda'_X\in J_X}$是对角矩阵.令$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{D}_X^{-1}\left\langle\Psi_X,\ \boldsymbol{A}\Psi_X\right\rangle\boldsymbol{D}_X^{-1}$，$\overline{\boldsymbol{B}}=\left\langle\Psi_M,\ \boldsymbol{B}\Psi_X\right\rangle\boldsymbol{D}_X^{1}$，$\overline{f}=\boldsymbol{D}_X^{1}\left\langle\Psi_X,\ \vec{f}\right\rangle$，则式（2-3）等价于离散线性方程组

$$\overline{\boldsymbol{LU}}=:\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{A}} & \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\\ \overline{\boldsymbol{B}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{u}\\ \overline{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{f}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=:\overline{\boldsymbol{F}}. \tag{2-4}$$

而且式（2-4）也是适定的，即存在常数$0<c_L\leqslant C_L$使得$c_L\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|_{\ell^2(J)}\leqslant\left\|\overline{\boldsymbol{LU}}\right\|_{\ell^2(J)}\leqslant C_L\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|_{\ell^2(J)}$．进一步,矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$是正定的，而且下列不等式成立：

$$c_A\|\overline{u}\|_{\ell^2(J_X)}\leqslant\left\|\overline{\boldsymbol{A}}\overline{u}\right\|_{\ell^2(J_X)}\leqslant C_A\|\overline{u}\|_{\ell^2(J_X)},$$

$$\left\|\overline{\boldsymbol{B}}\overline{u}\right\|_{\ell^2(J_M)}\leqslant C_B\|\overline{u}\|_{\ell^2(J_X)},\ \left\|\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}\right\|_{\ell^2(J_X)}\leqslant C_B\|\overline{p}\|_{\ell^2(J_M)}.$$

令$c=\min\{c_1,c_2\}$, $C=\max\{C_1,C_2\}$．容易证明

$$c\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|_{\ell^2(J)}\leqslant\|\boldsymbol{U}\|_{X\times M}\leqslant C\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|_{\ell^2(J)}. \tag{2-5}$$

综上所述，适定的Stokes问题等价于一个适定的离散线性方程组，而且式（2-5）成立．因此只需选择适当的数值方法求式（2-4）的数值解即可．这一方法可行的原因在于一大类算子的小波表示矩阵具有拟稀疏性质．所谓表示矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=(a_{\lambda_X,\lambda'_X})_{\lambda_X,\ \lambda'_X\in J_X}$是拟稀疏的，是指

$$\left|a_{\lambda_X,\lambda'_X}\right|\lesssim 2^{-\||\lambda_X|-|\lambda'_X|\|\sigma}(1+d(\lambda_X,\lambda'_X))^{\beta}.$$

这里，$d(\lambda_X,\lambda'_X)=:2^{\min(|\lambda_X|,|\lambda'_X|)}\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\vec{\psi}_{\lambda_X}),\mathrm{supp}(\vec{\psi}_{\lambda'_X}))$. 衰减指标$\sigma>\frac{n}{2}$和$\beta>n$分别依赖于所使用小波的光滑性和消失矩．在同样的意义下，$\bar{\boldsymbol{B}}$和$\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$也是拟稀疏的．在许多情况下，另一个较弱的概念仍可满足数值求解的要求：矩阵$\bar{A}$称为s阶可压缩的，若存在两个正可和序列$(\alpha_j)_j\geqslant 0$和距离$(\beta_j)_j\geqslant 0$，使得对每一个$j\geqslant 0$，存在每行每列至多有$2^j\alpha_j$个非零指标的矩阵$\bar{A}_j$，满足$\left\|\bar{A}-\bar{A}_j\right\|_{\ell^2(J_X)\to\ell^2(J_X)}\leqslant 2^{-js}\beta_j$. 记$s^*=:\min\left\{\frac{\sigma}{n}-\frac{1}{2},\ \frac{\beta}{n}-1\right\}$，则参考文献[48]证明：当$s\in(0,s^*)$时，拟稀疏矩阵是可压缩的．进一步，我们有以下结论．

引理2.1.1 设$\frac{1}{\tau^*}=s^*+\frac{1}{2}$且$\tau\in(\tau^*,2)$，则拟稀疏矩阵$\bar{A}$在$\ell^2(\nabla)$和$\ell_{\tau}^{\omega}(\nabla)$上是有界线性算子．

求解离散线性方程组的经典方法之一是Richardson迭代$\bar{\boldsymbol{U}}^{n+1}=\bar{\boldsymbol{U}}^n+\alpha(\bar{\boldsymbol{F}}-\overline{\boldsymbol{LU}}^n)$．然而由于式（2-4）中的矩阵$\bar{\boldsymbol{L}}$在$\ell^2$意义下不正定，所以上述迭代不收敛．基于此，Cohen等人在参考文献[53]中考虑式（2-4）的等价形式$\bar{\boldsymbol{L}}^*\overline{\boldsymbol{LU}}=\bar{\boldsymbol{L}}^*\bar{\boldsymbol{F}}$和对应的Richardson迭代

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{n+1}=\bar{\boldsymbol{U}}^n+\alpha(\bar{\boldsymbol{L}}^*\bar{\boldsymbol{F}}-\bar{\boldsymbol{L}}^*\overline{\boldsymbol{LU}}^n).$$

这一算法的缺点是：$\bar{\boldsymbol{L}}^*\bar{\boldsymbol{L}}$的条件数变大使得计算变得非常复杂．与此同时，参考文献[55]针对式（2-4）讨论了Uzawa迭代方法，当然计算也非常复杂．通过引入算子$\bar{\boldsymbol{B}}$的精确应用，Dahmen等人优化了参考文献[55]中的算法，但他们指出算子$\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$无法精确应用．

2.2 Richardson迭代和精确应用

当尝试利用经典的Richardson迭代

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{n+1}=\bar{\boldsymbol{U}}^n+\alpha(\bar{\boldsymbol{F}}-\overline{\boldsymbol{LU}}^n)$$

求解算子方程$\overline{\boldsymbol{LU}}=\bar{\boldsymbol{F}}$时，要求存在某个实常数$\alpha$使得$\left\|\boldsymbol{I}-\alpha\bar{\boldsymbol{L}}\right\|_{\ell^2\to\ell^2}<1$. 下面说明Richardson迭代只适合于正定或负定算子．

引理2.2.1 设H是Hilbert空间，其内积为$[\cdot,\cdot]$，A是H上的一个有界自伴算子．令$m=\inf\limits_{\|u\|=1}[Au,u]$，$M=\sup\limits_{\|u\|=1}[Au,u]$. 则

（1）$\|A\|=:\sup\limits_{\|u\|=1}\|Au\|=\max\{|m|,\ |M|\}=\sup\limits_{\|u\|=1}|[Au,u]|$;

（2）算子A的谱含于闭区间$[m,M]$，而且m和M是属于谱的点．

下面的命题似乎是众所周知的，由于它对本书的重要性，我们写出简略证明如下．

命题2.2.1 设H是Hilbert空间，其内积为$[\cdot,\cdot]$．若A是H上的有界自伴线性算子，则存在$\alpha>0$使得$\|\boldsymbol{I}-\alpha A\|=:\rho<1$，当且仅当存在$c_A>0$，使得对任意的$u\in H$，$[Au,u]\geqslant c_A\|u\|^2$；存在$\alpha<0$使得$\|\boldsymbol{I}-\alpha A\|=:\rho<1$，当且仅当存在$c_A>0$，使得对任意的$u\in H$，$[Au,u]\leqslant -c_A\|u\|^2$．当

$\alpha=\dfrac{2}{m+M}$时，$\|I-\alpha A\|$达到最小且$\|I-\alpha A\|=\dfrac{M-m}{M+m}$.

证明 只证第一种情形，第二种情形类似可证．先证必要性：因为$[(I-\alpha A)u,u]\leqslant\|I-\alpha A\|\|u\|^2=\rho\|u\|^2$，所以$[Au,u]\geqslant\dfrac{1-\rho}{\alpha}\|u\|^2=:c_A\|u\|^2$. 再证充分性：由$A$的自伴性，$\|(I-\alpha A)u\|^2=\|u\|^2-2\alpha[Au,u]+\alpha^2\|Au\|^2$．利用$[Au,u]\geqslant c_A\|u\|^2$和$A$的有界性，$\|(I-\alpha A)u\|^2\leqslant(1-2\alpha c_A+\alpha^2C_A^2)\|u\|^2$. 取$0<\alpha<\dfrac{2c_A}{C_A^2}$，则$1-2\alpha c_A+\alpha^2C_A^2<1$. 令$\rho=:\sqrt{1-2\alpha c_A+\alpha^2C_A^2}$即可.

利用引理2.2.1(1)，$\|I-\alpha A\|=\max\{|\inf\limits_{\|u\|=1}[(I-\alpha A)u,u]|,|\sup\limits_{\|u\|=1}[(I-\alpha A)u,u]|\}=\max\{|1-\alpha m|,|1-\alpha M|\}$．若$\alpha=\dfrac{2}{m+M}$，则$\|I-\alpha A\|=\max\left\{\left|1-\dfrac{2m}{m+M}\right|,\left|1-\dfrac{2M}{m+M}\right|\right\}=\dfrac{M-m}{M+m}$. 若$0<\alpha<\dfrac{2}{m+M}$或$\alpha>\dfrac{2}{m+M}$，则$\|I-\alpha A\|=\max\{|1-\alpha m|,|1-\alpha M|\}>\dfrac{M-m}{M+m}$. 命题得证.

注意到，在$\ell^2(J)$上有$\left\langle\bar{L}^*\bar{L}\bar{U},\bar{U}\right\rangle=\left\|\bar{L}\bar{U}\right\|_{\ell^2(J)}^2\geqslant c_L^2\left\|\bar{U}\right\|_{\ell^2(J)}^2$. 这说明$\bar{L}^*\bar{L}$在$\ell^2(J)$上是正定的．由命题2.2.1，存在$\alpha_0>0$使得$\left\|I-\alpha_0\bar{L}^*\bar{L}\right\|_{\ell^2\to\ell^2}<1$. 因为方程$\bar{L}\bar{U}=\bar{F}$等价于$\bar{L}^*\bar{L}\bar{U}=\bar{L}^*\bar{F}$，在参考文献[53]中Cohen, Dahmen和DeVore讨论了Richardson迭代

$$\bar{U}^{n+1}=\bar{U}^n+\alpha_0(\bar{L}^*\bar{F}-\bar{L}^*\bar{L}\bar{U}^n)\ .$$

这个算法的缺点是：$\bar{L}^*\bar{L}$的条件数变大导致计算量增大．因此一个自然的想法是寻找可逆矩阵M_0，使得

（1）存在一个等价于$\|\cdot\|_{\ell^2(J)}$的新范数$\|\cdot\|$；

（2）存在某个$\alpha\in\mathbf{R}$使得对应的算子范数满足$\|I-\alpha M_0\bar{L}\|<1$；

（3）由M_0导致的额外的运算量可以接受.

下面命题表明：对角矩阵

$$\begin{pmatrix} aI & O \\ O & bI \end{pmatrix}$$

一般不能充当M_0.

命题2.2.2 令

$$\bar{L}=:\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B}^{\mathrm{T}} \\ \bar{B} & O \end{pmatrix} \text{ 和 } M=:\begin{pmatrix} aI & O \\ O & bI \end{pmatrix}.$$

若$ab>0$，则对任意的算子范数都有$\|I-M\bar{L}\|\geqslant1$.

证明 在$\ell^2(J_X\times J_M)$中定义新的内积

$$\left[\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix},\begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix}\right]=:|b|\langle u,v\rangle_{\ell^2(J_X)}+|a|\langle p,q\rangle_{\ell^2(J_M)}.$$

容易验证此内积导出的新范数$\|\cdot\|_0$和$\|\cdot\|_{J_X\times J_M}$等价．进一步，

$$\left[\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}\begin{pmatrix}u\\p\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}v\\q\end{pmatrix}\right]=a|b|\langle\bar{\boldsymbol{A}}u,\ v\rangle_{\ell^2(J_X)}+a|b|\langle\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}p,\ v\rangle_{\ell^2(J_X)}+|a|b\langle\bar{\boldsymbol{B}}u,\ q\rangle_{\ell^2(J_M)},$$

$$\left[\begin{pmatrix}u\\p\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}\begin{pmatrix}v\\q\end{pmatrix}\right]=a|b|\langle\bar{\boldsymbol{A}}u,\ v\rangle_{\ell^2(J_X)}+|a|b\langle\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}p,\ v\rangle_{\ell^2(J_X)}+a|b|\langle\bar{\boldsymbol{B}}u,\ q\rangle_{\ell^2(J_M)}.$$

因为$ab>0$, 所以$a|b|=|a|b$. 从而, $\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}$关于新内积是自伴的.

设$\bar{p}\neq 0,\bar{\boldsymbol{V}}=(0,\ \bar{p})^{\mathrm{T}}\in\ell^2(J_X\times J_M)$, 则容易验证$[\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}},\bar{\boldsymbol{V}}]=0$. 从而$m=:\inf\limits_{\|U\|_0=1}[\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}},\bar{\boldsymbol{U}}]\leqslant 0$. 记$\sigma(\boldsymbol{A})$为算子$\boldsymbol{A}$的谱集, 则对$\ell^2(J_X\times J_M)$上的任意算子范数, $\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}\|\geqslant\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}})\}=\sup\{|1-\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}})\}$. 因为$\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}$是有界自伴的, 所以由引理2.2.1（2）知$m\in\sigma(\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}})$. 进一步, $\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}\|\geqslant|1-m|$. 注意到$m\leqslant 0$, 那么$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{L}}\|\geqslant 1$.

比对角矩阵稍微复杂一些, 取

$$\boldsymbol{M}_0=:\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \bar{\boldsymbol{B}} & -r\boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

其中, $0<r<c_A$. Bramble和Pasciak证明出: $\boldsymbol{M}_0\bar{\boldsymbol{L}}$关于内积

$$\left[\begin{pmatrix}u\\p\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}v\\q\end{pmatrix}\right]=:\langle\bar{\boldsymbol{A}}u,\ v\rangle_{\ell^2(J_X)}-r\langle u,\ v\rangle_{\ell^2(J_X)}+\langle p,\ q\rangle_{\ell^2(J_M)}$$

是对称正定的. 容易验证上述内积导出的范数$\|\cdot\|$等价于$\|\cdot\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}$. 由命题2.2.1, 存在$\alpha_0>0$使得$\|\boldsymbol{I}-\alpha_0\boldsymbol{M}_0\bar{\boldsymbol{L}}\|=:\rho<1$. 从而可对等价方程组$\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{M}_0\bar{\boldsymbol{F}}$进行经典Richardson迭代

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{n+1}=\bar{\boldsymbol{U}}^n+\alpha_0(\boldsymbol{M}_0\bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}}^n)\ . \tag{2-6}$$

为简化$\bar{\boldsymbol{B}}$和$\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$的计算, 选择如下的双正交小波基, 令

$$\Psi_X=:\{\Psi^i\delta_i,i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}\ \text{和}\ \tilde{\Psi}_X=:\{\tilde{\Psi}^i\delta_i,i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

是对应速度空间X的双正交小波基. 这里, $J_X=:\{(i,\lambda)|i\in\{1,2,\cdots,n\},\lambda\in\nabla\}$. 对$\lambda_X=:(i,\lambda)\in J_X$, $\tilde{\psi}_{\lambda_X}=\psi_\lambda^{\{i\}}\delta_i$. 类似地, 令

$$\Psi_M=\tilde{\Psi}^0=\{\tilde{\psi}_\lambda^{\varnothing}|\lambda\in\nabla\}\text{和}\tilde{\Psi}_M=\Psi^0=\{\psi_\lambda^{\varnothing}|\lambda\in\nabla\}$$

是压力空间M的双正交小波基. 而且下列微分关系成立:

$$\partial_i\Psi^i=\boldsymbol{D}^{(i)}\Psi^0 \tag{2-7}$$

$$\partial_i\tilde{\Psi}^0=-(\boldsymbol{D}^{(i)})^{\mathrm{T}}\tilde{\Psi}^i\ . \tag{2-8}$$

这里$\boldsymbol{D}^{(i)}$是稀疏矩阵, 即每行每列只有很少且固定个数的非零坐标.

从式（2-7）可以看出: 散度算子把Ψ_X中的元素变换为$\tilde{\Psi}_M$中元素的线性组合. 根据这一事实, 参考文献[56]给出了$\bar{\boldsymbol{B}}$的精确应用, 但是并没有给出证明. 所谓精确应用是指, 当矩阵$\bar{\boldsymbol{B}}$作用有限长序列$\bar{v}$时可以精确地得到$\bar{\boldsymbol{B}}\bar{v}$, 而不需要进行近似计算. 具体地, 设$\bar{v}\in\ell^2(J_X)$具有有限支撑且$\mathrm{div}(\bar{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X^{1}\Psi_X)=-\bar{\omega}^{\mathrm{T}}\tilde{\Psi}_M$, 则由式（2-7）和$\boldsymbol{D}^{(i)}$的稀疏性可得

$$\#\mathrm{supp}\ \bar{\omega}\leqslant C\#\mathrm{supp}\ \bar{v}. \tag{2-9}$$

进一步，由$\overline{\boldsymbol{B}}$=div 容易证明

$$\overline{\boldsymbol{B}}\overline{v}=\overline{\omega}. \tag{2-10}$$

根据上面事实，参考文献[56]的作者引入下面的记号.

DIV$[\overline{v}]\rightarrow(\overline{\omega},\Lambda)$（$\Lambda$表示$\overline{\omega}$的非零元素所对应的指标集）：对任意有限支撑序列$\overline{v}\in\ell^2(J_X)$，DIV决定有限支撑序列$\overline{\omega}\in\ell^2(J_M)$满足$\operatorname{div}(\overline{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X^{-1}\Psi_X)=-\overline{\omega}^{\mathrm{T}}\tilde{\Psi}_M$.

有作者认为$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$没有精确应用．下面的命题说明情况并非如此．注意到$\Psi_M$中的元素对$x_i$求偏导数是$\tilde{\Psi}_X$中第$i$个分量$\tilde{\Psi}^i$中元素的线性组合，我们有如下命题.

命题2.2.3 设$\overline{p}\in\ell^2(J_M)$具有有限支撑且$\nabla(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)=\overline{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X\tilde{\Psi}_X$，则$\#\operatorname{supp}\overline{v}\leqslant C\#\operatorname{supp}\overline{p}$且$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}=\overline{v}$.

证明 注意到

$$\nabla(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)=\begin{pmatrix}\partial_1(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)\\ \vdots\\ \partial_n(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{p}^{\mathrm{T}}(\partial_1\tilde{\Psi}^0)\\ \vdots\\ \overline{p}^{\mathrm{T}}(\partial_n\tilde{\Psi}^0)\end{pmatrix}=\overline{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X\tilde{\Psi}_X.$$

由式（2-8）和$\boldsymbol{D}^{(i)}$的稀疏性，$\#\operatorname{supp}\overline{v}\leqslant C\#\operatorname{supp}\overline{p}$．下面证明$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}=\overline{v}$.

因为$\overline{\boldsymbol{B}}=\langle\Psi_M,\boldsymbol{B}\Psi_X\rangle\boldsymbol{D}_X^{-1}$，所以$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_X^{-1}\langle\Psi_X,\boldsymbol{B}^*\Psi_M\rangle$且

$$(\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p})_{\lambda_X}=\sum_{\lambda\in J_M}2^{|\lambda_X|}\langle\tilde{\psi}_{\lambda_X},\boldsymbol{B}^*\tilde{\psi}_\lambda^{\varnothing}\rangle\overline{p}_\lambda. \tag{2-11}$$

利用$\overline{p}$的有限支撑性，式（2-11）可以写为$(\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p})_{\lambda_X}=\langle 2^{|\lambda_X|}\tilde{\psi}_{\lambda_X},\boldsymbol{B}^*(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)\rangle=\langle\boldsymbol{B}(2^{-|\lambda_X|}\tilde{\psi}_{\lambda_X}),\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M\rangle=-(\operatorname{div}(2^{|\lambda_X|}\tilde{\psi}_{\lambda_X}),\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)=(2^{-|\lambda_X|}\tilde{\psi}_{\lambda_X},\nabla(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M))=(2^{-|\lambda_X|}\tilde{\psi}_{\lambda_X},\overline{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X\tilde{\Psi}_X)=\overline{v}_{\lambda_X}$.
从而，$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}=\overline{v}$.

类似于DIV，根据命题2.2.3，我们给出下述记号.

DUAL$[\overline{p}]\rightarrow(\overline{v},\Lambda)$：对任意有限支撑序列$\overline{p}\in\ell^2(J_M)$，DUAL决定有限支撑序列$\overline{v}\in\ell^2(J_X)$满足$\nabla(\overline{p}^{\mathrm{T}}\Psi_M)=\overline{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_X\tilde{\Psi}_X$.

为在下一节给出我们的算法，下面引入两个基本的数值步骤.

COARSE$[v,\eta]\rightarrow(\Lambda,\overline{v})$：首先将$v$的非零坐标按绝对值大小进行递减重排，对应的指标集为$\lambda^*=:(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$；其次计算$\|v\|_{\ell^2(\nabla)}^2=\sum_{i=1}^N|v_{\lambda_i}|^2$；最后，找最小的$k=:K$使得$\sum_{i=1}^K|v_{\lambda_i}|^2\geqslant\|v\|_{\ell^2(\nabla)}^2-\eta^2$．记$\Lambda=:\{\lambda_i;\ i=1,\cdots,K\}$并定义$\overline{v}$为：$\overline{v}_\lambda=:v_\lambda,\ \lambda\in\Lambda;\overline{v}_\lambda=:0,\lambda\notin\Lambda$.

定理2.2.1 给定$s>0$和$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$．若$\overline{v}\in\ell_\tau^\omega(\nabla)$，$\omega$具有有限支撑且$\|\overline{v}-\omega\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\eta$，则由COARSE$[\omega,d\eta](d>1)$得到$(\overline{\omega},\Lambda)$至多需要$N=:\#(\operatorname{supp}\omega)$次乘法运算和$N\log N$次排列运算．进一步，

$$\#(\Lambda)\leqslant C_0^{\frac{1}{s}}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^{\frac{1}{s}}\eta^{-\frac{1}{s}},\ \|\overline{\omega}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\leqslant C_1\|\overline{v}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}.$$

为引入数值步骤APPLY，设$\overline{v}_{[j]}$（$j=1,\cdots,[\log N]+1$）表示$\overline{v}$在$\|\cdot\|_{\ell^2(\nabla)}$下的最佳$2^j$－项逼近，其中$N=:\#(\operatorname{supp}\overline{v})$．对$j\geqslant[\log N]+1$，定义$\overline{v}_{[j]}=:\overline{v}$．设$\overline{\boldsymbol{A}}$是$s$阶可压缩矩阵．令

$$\omega_k=:\overline{\boldsymbol{A}}_k\overline{v}_{[0]}+\overline{\boldsymbol{A}}_{k-1}(\overline{v}_{[1]}-\overline{v}_{[0]})+\cdots+\overline{\boldsymbol{A}}_0(\overline{v}_{[k]}-\overline{v}_{[k-1]}),$$

则$\overline{\boldsymbol{A}}\overline{v}-\omega_k=\overline{\boldsymbol{A}}(\overline{v}-\overline{v}_{[k]})+(\overline{\boldsymbol{A}}-\overline{\boldsymbol{A}}_0)(\overline{v}_{[k]}-\overline{v}_{[k-1]})+\cdots+(\overline{\boldsymbol{A}}-\overline{\boldsymbol{A}}_k)\overline{v}_{[0]}$．进一步，$\|\overline{\boldsymbol{A}}\overline{v}-\omega_k\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant C_A\|\overline{v}-\overline{v}_{[k]}\|_{\ell^2(\nabla)}+2^{-ks}\beta_k\|\overline{v}_{[0]}\|_{\ell^2(\nabla)}+\sum_{j=0}^{k-1}2^{-js}\beta_j\|\overline{v}_{[k-j]}-\overline{v}_{[k-j-1]}\|_{\ell^2(\nabla)}$．

APPLY $\overline{\boldsymbol{A}}[\overline{v},\eta]\to(\omega,\Lambda)$：

（1）对$\overline{v}$的非零坐标按绝对值大小进行递减重排，得到向量$\overline{v}_{[0]}$，$\overline{v}_{[j]}-\overline{v}_{[j-1]}$，$j=1,\cdots,[\log N]+1$．计算$\|\overline{v}_{[0]}\|^2_{\ell^2(\nabla)}$，$\|\overline{v}_{[j]}-\overline{v}_{[j-1]}\|^2_{\ell^2(\nabla)}$，$j=1,\cdots,[\log N]+1$；

（2）令$k=0$，

① 计算$R_k=:C_A\|\overline{v}-\overline{v}_{[k]}\|_{\ell^2(\nabla)}+2^{-ks}\beta_k\|\overline{v}_{[0]}\|_{\ell^2(\nabla)}+\sum_{j=0}^{k-1}2^{-js}\beta_j\|\overline{v}_{[k-j]}-\overline{v}_{[k-j-1]}\|_{\ell^2(\nabla)}$；

② 如果$R_k\leqslant\eta$，停止并输出k，否则用$k+1$替代k；

（3）对（2）中输出的k和$j=0,1,\cdots,k$，首先计算$\overline{\boldsymbol{A}}_{k-j}$中与$\overline{v}_{[j]}-\overline{v}_{[j-1]}$的非零指标对应的列向量；其次计算$\omega_k=:\overline{\boldsymbol{A}}_k\overline{v}_{[0]}+\overline{\boldsymbol{A}}_{k-1}(\overline{v}_{[1]}-\overline{v}_{[0]})+\cdots+\overline{\boldsymbol{A}}_0(\overline{v}_{[k]}-\overline{v}_{[k-1]})$；最后，定义$\omega=:\omega_k$和$\Lambda=:\operatorname{supp}\omega$．

定理2.2.2 设（ω,Λ）是APPLY $\overline{\boldsymbol{A}}[\overline{v},\eta]$的输出，则$\|\overline{\boldsymbol{A}}\overline{v}-\omega\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\eta$；若$\overline{\boldsymbol{A}}$是拟稀疏矩阵，则对任意的$s\in(0,s^*)$和$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$，

$$\#\Lambda\leqslant C_2|\overline{v}|^{\frac{1}{s}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)}\eta^{-\frac{1}{s}},\ \|\omega\|_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)}\leqslant C_3\|\overline{v}\|_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)};$$

进一步，计算ω所需的乘法运算和排列运算量不超过$2C_2|\overline{v}|^{\frac{1}{s}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)}\eta^{-\frac{1}{s}}+2N$和$N\log N$．

2.3 算法和误差分析

在这部分，将参考文献[107]的技巧与参考文献[53]、[54]中的方法相结合对方程$\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{LU}}=\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{F}}$的Richardson迭代（见式（2-6））设计一个自适应算法，并且估计它的误差和计算复杂度．除COARSE和APPLY外，还需要两个基本步骤，记为RHS和MULT．尽管它们与参考文献[53]、[54]中的符号相同，但含义不同．在介绍这两个步骤之前，假设矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$的拟稀疏性对应$s_1^*$，而矩阵$\overline{\boldsymbol{B}}$和$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$对应$s_2^*$，并记$s^*=:\min\{s_1^*,s_2^*\}$．

RHS$[\rho^{\ell}\varepsilon_j,\overline{\boldsymbol{F}}]\to\overline{\boldsymbol{F}}_{\ell}$：

（1）COARSE$\left[\overline{f},\dfrac{\rho^{\ell}\varepsilon_j}{\sqrt{1+C_B^2}}\right]\to(\overline{f}_{\ell},\Lambda_{f,\ell})$；

（2） DIV$[\bar{f}_\ell]\to\bar{g}_\ell$. 定义

$$\bar{F}_\ell=\begin{pmatrix}\bar{f}_\ell\\ \bar{g}_\ell\end{pmatrix}.$$

引理2.3.1 设 $\bar{f}\in\ell_\tau^\omega(J_X)$, $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$, $0<s<s_2^*$, 则RHS的输出满足

$$\|\bar{F}_\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}\leqslant C\|\bar{f}\|_{\ell_\tau^\omega(J_X)} \text{ 和 } \|M_0\bar{F}-\bar{F}_\ell\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\rho^\ell\varepsilon_j;$$

为求此输出，至多需要进行 $\#\Lambda_{f,\ell}\leqslant C\rho^{-\frac{\ell}{s}}\varepsilon_j^{\frac{1}{s}}$ 次算术运算而不需排列运算.

证明 根据引理2.1.1, $\bar{B}$ 的拟稀疏性蕴含它在 $\ell_\tau^\omega(J_X)$ 上是有界的. 因此,

$$\|\bar{g}_\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_M)}=\|\overline{Bf}_\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_M)}\leqslant C\|\bar{f}_\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_X)}.$$

另一方面，由定理2.2.1, $\|\bar{f}_\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_X)}\leqslant C\|\bar{f}\|_{\ell_\tau^\omega(J_X)}$. 故 $\|\bar{F}_\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}\leqslant C\|\bar{f}\|_{\ell_\tau^\omega(J_X)}$.

由 $\|\overline{Bu}\|_{\ell^2(J_M)}\leqslant C_B\|\bar{u}\|_{\ell^2(J_X)}$ 和 $\overline{Bf}_\ell=\bar{g}_\ell$, $\|\overline{Bf}-\bar{g}_\ell\|_{\ell^2(J_M)}=\|\overline{Bf}-\overline{Bf}_\ell\|_{\ell^2(J_M)}\leqslant C_B\|\bar{f}-\bar{f}_\ell\|_{\ell^2(J_X)}$.

最后，根据 M_0 的定义, $\|M_0\bar{F}-\bar{F}_\ell\|^2_{\ell^2(J_X\times J_M)}=\|\bar{f}-\bar{f}_\ell\|^2_{\ell^2(J_X)}+\|\overline{Bf}-\bar{g}_\ell\|^2_{\ell^2(J_M)}\leqslant(1+C_B^2)\|\bar{f}-\bar{f}_\ell\|^2_{\ell^2(J_X)}$ $\leqslant(\rho^\ell\varepsilon_j)^2$.

因为通常假定 f 的小波系数 $\bar{f}$ 是已知的，所以由定理2.2.1可直接得到最后结论.

为介绍第二个基本步骤，定义

$$\bar{V}^\ell=:\begin{pmatrix}\bar{v}^\ell\\ \bar{p}^\ell\end{pmatrix} \text{ 和 } \bar{W}^\ell=:\begin{pmatrix}\bar{\omega}^\ell\\ \bar{q}^\ell\end{pmatrix}.$$

MULT$[\rho^\ell\varepsilon_j,\ \bar{L},\ \bar{V}^\ell]\to\bar{W}^\ell$:

（1） APPLY $\bar{A}\left[\bar{v}^\ell,\ \dfrac{\rho^\ell\varepsilon_j}{\sqrt{1+C_B^2}}\right]\to\bar{\omega}_1^\ell$;

（2） DUAL$\left[\bar{p}^\ell\right]\to\bar{\omega}_2^\ell$. 令 $\bar{\omega}^\ell=:\bar{\omega}_1^\ell+\bar{\omega}_2^\ell$;

（3） DIV$\left[\bar{\omega}^\ell\right]\to\bar{q}_1^\ell$; DIV$\left[\bar{v}^\ell\right]\to\bar{q}_2^\ell$. 定义 $\bar{q}^\ell=:\bar{q}_1^\ell-r\bar{q}_2^\ell$.

引理2.3.2 设 $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$, $0<s<s_2^*$, 则MULT的输出满足

$$\|\bar{W}^\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}\leqslant C\|\bar{V}^\ell\|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)} \text{ 和 } \|M_0\overline{LV}^\ell-\bar{W}^\ell\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\rho^\ell\varepsilon_j;$$

为求此输出，至多需要 $C\rho^{-\frac{\ell}{s}}|\bar{v}^\ell|^{\frac{1}{s}}_{\ell_\tau^\omega(J_X)}\varepsilon_j^{-\frac{1}{s}}+2N_\ell(0<s<s_1^*)$ 次算术运算及 $N_\ell\log N_\ell$ 次排列运算，其中 $N_\ell=\#(\operatorname{supp}\bar{v}^\ell)$.

证明 由MULT的定义可知 $\bar{\omega}^\ell=\bar{\omega}_1^\ell+\bar{\omega}_2^\ell=\bar{\omega}_1^\ell+\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{p}^\ell$. 根据定理2.2.2, $\bar{B}^{\mathrm{T}}$ 的拟稀疏性及引理2.1.1, 有

$$\left\|\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X)}\leqslant C\left(\left\|\overline{v}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X)}+\left\|\overline{p}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_M)}\right)\leqslant C\left\|\overline{\boldsymbol{V}}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X\times J_M)},$$

$$\left\|\overline{q}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_M)}=\left\|\overline{q}_1^{\ell}-r\overline{q}_2^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_M)}=\left\|\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\omega}^{\ell}-r\overline{\boldsymbol{B}}\overline{v}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_M)}\leqslant C\left\|\overline{\boldsymbol{V}}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X\times J_M)}.$$

因此, $\left\|\overline{\boldsymbol{W}}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant\left\|\overline{\omega}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X)}+\left\|\overline{q}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_M)}\leqslant C\left\|\overline{\boldsymbol{V}}^{\ell}\right\|_{\ell_{\tau}^{\omega}(J_X\times J_M)}$.

为证明第二个不等式, 注意到

$$\boldsymbol{M}_0=:\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \overline{\boldsymbol{B}} & -r\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\text{和}\ \overline{\boldsymbol{L}}=:\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{A}} & \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\\ \overline{\boldsymbol{B}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

那么 $\left\|\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}}^{\ell}-\overline{\boldsymbol{W}}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}^2=\left\|\overline{\boldsymbol{A}}\overline{v}^{\ell}+\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}^{\ell}-\overline{\omega}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_X)}^2+\left\|\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}}\overline{v}^{\ell}-r\overline{\boldsymbol{B}}\overline{v}^{\ell}+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}^{\ell}-\overline{q}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_M)}^2$.

下面分别估计后两项: 因为 $\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}^{\ell}=\overline{\boldsymbol{\omega}}_2^{\ell}$, $\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\ell}=:\overline{\boldsymbol{\omega}}_1^{\ell}+\overline{\boldsymbol{\omega}}_2^{\ell}$, 所以

$$\left\|\overline{\boldsymbol{A}}\overline{v}^{\ell}+\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}^{\ell}-\overline{\omega}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_X)}=\left\|\overline{\boldsymbol{A}}\overline{v}^{\ell}-\overline{\omega}_1^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_X)}\leqslant\frac{\rho^{\ell}\varepsilon_j}{\sqrt{1+C_B^2}}.\tag{2-12}$$

利用 $\overline{q}^{\ell}+r\overline{\boldsymbol{B}}\overline{v}^{\ell}=\overline{q}_1^{\ell}=\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\omega}^{\ell}$ 及 $\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}^{\ell}=\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\omega}_2^{\ell}=\overline{\boldsymbol{B}}(\overline{\omega}^{\ell}-\overline{\omega}_1^{\ell})$,有

$$\left\|\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}}\overline{v}^{\ell}-r\overline{\boldsymbol{B}}\overline{v}^{\ell}+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{p}^{\ell}-\overline{q}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_M)}=\left\|\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}}\overline{v}^{\ell}-\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\omega}_1^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_M)}\leqslant\frac{C_B\rho^{\ell}\varepsilon_j}{\sqrt{1+C_B^2}}.\tag{2-13}$$

由式(2.12)和式(2.13), $\left\|\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}}^{\ell}-\overline{\boldsymbol{W}}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}^2\leqslant\left(\frac{\rho^{\ell}\varepsilon_j}{\sqrt{1+C_B^2}}\right)^2+\left(\frac{C_B\rho^{\ell}\varepsilon_j}{\sqrt{1+C_B^2}}\right)^2=(\rho^{\ell}\varepsilon_j)^2$,

从而 $\left\|\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}}^{\ell}-\overline{\boldsymbol{W}}^{\ell}\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\rho^{\ell}\varepsilon_j$. 关于运算复杂度的结论可直接由定理2.2.2得到.

利用RHS和MULT, 给出求解 $\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{M}_0\overline{\boldsymbol{F}}$ 的算法: 设存在 $C>c>0$ 使得 $c\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|_{\ell^2}\leqslant\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|\leqslant C\left\|\overline{\boldsymbol{U}}\right\|_{\ell^2}$, 并记 $\varepsilon_0=:c_L^{-1}C\left\|\overline{\boldsymbol{F}}\right\|_{\ell^2}$ 和 $\varepsilon_{j+1}=:a\left(\frac{C}{c}d+1\right)\varepsilon_j$, 其中 $0<a<1, d>1$. 进一步, 令

$$K=:\min\left\{\ell\in N\middle|\rho^{\ell-1}(2\alpha_0C\ell+\rho)\leqslant a\right\}.$$

SOLVE$[\varepsilon,\overline{\boldsymbol{L}},\overline{\boldsymbol{F}}]\to(\overline{\boldsymbol{U}}(\varepsilon),\Lambda(\varepsilon))$:

(1) 初始化, 固定目标精度 ε, 令 $\overline{\boldsymbol{U}}^0=:0$, $\Lambda_0=\varnothing$ 和 $j=0$.

(2) 如果 $\varepsilon_j\leqslant c\varepsilon$, 直接取 $\overline{\boldsymbol{U}}(\varepsilon)=:\overline{\boldsymbol{U}}^j$ 即可. 否则, 记 $\overline{\boldsymbol{V}}^0=:\overline{\boldsymbol{U}}^j$.

① 对 $\ell=0,\cdots,K-1$, 计算

$$\mathrm{RHS}[\rho^{\ell}\varepsilon_j,\overline{\boldsymbol{F}}]\to\overline{\boldsymbol{F}}_{\ell}\ \text{和}\ \mathrm{MULT}[\rho^{\ell}\varepsilon_j,\ \overline{\boldsymbol{L}},\ \overline{\boldsymbol{V}}^{\ell}]\to\overline{\boldsymbol{W}}^{\ell}.$$

并令 $\overline{\boldsymbol{V}}^{\ell+1}=:\overline{\boldsymbol{V}}^{\ell}+\alpha_0(\overline{\boldsymbol{F}}_{\ell}-\overline{\boldsymbol{W}}^{\ell})$.

② 应用COARSE$\left[\overline{\boldsymbol{V}}^K,\ \frac{da\varepsilon_j}{c}\right]\to(\overline{\boldsymbol{U}}^{j+1},\ \Lambda_{j+1})$, 并且返回到(2)中.

现在, 给出误差估计定理.

定理2.3.1 设方程 $\overline{\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}}=\overline{\boldsymbol{F}}$ 的解 $\overline{U}\in\ell_{\tau}^{\omega}(J_X\times J_M)$ 且 $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$, 则

$$\left\|\bar{U}-\bar{U}(\varepsilon)\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\varepsilon\leqslant a^{-1}C_0\left|\bar{U}\right|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}(\#\Lambda(\varepsilon))^{-s}.$$

证明 设$\bar{U}^\ell(\bar{V})$表示以$\bar{V}$为初值的第ℓ次精确迭代，即

$$\bar{U}^{\ell+1}(\bar{U}^j)=\bar{U}^\ell(\bar{U}^j)+\alpha_0(M_0\bar{F}-M_0\overline{LU}^\ell(\bar{U}^j)).$$

结合$\bar{V}^{\ell+1}$的定义，$\bar{V}^{\ell+1}-\bar{U}^{\ell+1}(\bar{U}^j)=\bar{V}^\ell+\alpha_0(\bar{F}_\ell-\bar{W}^\ell)-\bar{U}^\ell(\bar{U}^j)-\alpha_0(M_0\bar{F}-M_0\overline{LU}^\ell(\bar{U}^j))$
$=(I-\alpha_0M_0\bar{L})\left[\bar{V}^\ell-\bar{U}^\ell(\bar{U}^j)\right]+\alpha_0[(\bar{F}_\ell-\bar{M}_0\bar{F})+(M_0\overline{LV}^\ell-\bar{W}^\ell)]$.

进一步，由引理2.3.1, 2.3.2和$\left\|I-\alpha_0M_0\bar{L}\right\|\leqslant\rho$，$\left\|\bar{V}^{\ell+1}-\bar{U}^{\ell+1}(\bar{U}^j)\right\|\leqslant\rho\left\|\bar{V}^\ell-\bar{U}^\ell(\bar{U}^j)\right\|+2\alpha_0C\rho^\ell\varepsilon_j$. 注意到$\bar{V}^0=\bar{U}^j$和$\bar{U}^0(\bar{U}^j)=\bar{U}^j$，那么

$$\left\|\bar{V}^{\ell+1}-\bar{U}^{\ell+1}(\bar{U}^j)\right\|\leqslant\rho^{\ell+1}\left\|\bar{V}^0-\bar{U}^0(\bar{U}^j)\right\|+2\alpha_0C(\ell+1)\rho^\ell\varepsilon_j=2\alpha_0C(\ell+1)\rho^\ell\varepsilon_j. \quad (2\text{-}14)$$

下面利用归纳法证明

$$\left\|\bar{U}-\bar{U}^j\right\|\leqslant\varepsilon_j. \quad (2\text{-}15)$$

由$\bar{U}^0=0$和ε_0的定义，式(2-15)对$j=0$成立. 设$\left\|\bar{U}-\bar{U}^j\right\|\leqslant\varepsilon_j$，利用式(2-14)，

$$\begin{aligned}\left\|\bar{V}^K-\bar{U}\right\|&\leqslant\left\|\bar{V}^K-\bar{U}^K(\bar{U}^j)\right\|+\left\|\bar{U}^K(\bar{U}^j)-\bar{U}\right\|\leqslant2\alpha_0CK\rho^{K-1}\varepsilon_j+\rho^K\left\|\bar{U}-\bar{U}^j\right\|\\&\leqslant2\alpha_0CK\rho^{K-1}\varepsilon_j+\rho^K\varepsilon_j=(2\alpha_0CK+\rho)\rho^{K-1}\varepsilon_j\leqslant a\varepsilon_j.\end{aligned} \quad (2\text{-}16)$$

由算法知$\left\|\bar{U}^{j+1}-\bar{V}^K\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\dfrac{da\varepsilon_j}{c}$，故

$$\left\|\bar{U}-\bar{U}^{j+1}\right\|\leqslant\left\|\bar{U}^{j+1}-\bar{V}^K\right\|+\left\|\bar{V}^K-\bar{U}\right\|\leqslant\alpha(\frac{C}{c}d+1)\varepsilon_j=:\varepsilon_{j+1}.$$

取$\bar{U}(\varepsilon)=\bar{U}^{j+1}$，则$\left\|\bar{U}-\bar{U}(\varepsilon)\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant c^{-1}\left\|\bar{U}-\bar{U}^{j+1}\right\|\leqslant\varepsilon$. 另一方面，不等式(2-16)蕴含着$\left\|\bar{U}-\bar{V}^K\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\dfrac{a\varepsilon_j}{c}$. 利用定理2.2.1,

$$\#\Lambda(\varepsilon)\leqslant C_0^{\frac{1}{s}}\left|\bar{U}\right|^{\frac{1}{s}}_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}\left(\frac{a\varepsilon_j}{c}\right)^{-\frac{1}{s}}.$$

因为$\varepsilon_j>c\varepsilon$，所以$\varepsilon\leqslant a^{-1}C_0\left|\bar{U}\right|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}(\#\Lambda(\varepsilon))^{-s}$. 最后，

$$\left\|\bar{U}-\bar{U}(\varepsilon)\right\|_{\ell^2(J_X\times J_M)}\leqslant\varepsilon\leqslant a^{-1}C_0\left|\bar{U}\right|_{\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)}(\#\Lambda(\varepsilon))^{-s}.$$

下面的定理讨论了SOLVE算法的计算复杂度.

定理2.3.2 设方程的解$\bar{U}\in\ell_\tau^\omega(J_X\times J_M)$，$\dfrac{1}{\tau}=s+\dfrac{1}{2}$，$0<s<s^*$，则计算$\bar{U}(\varepsilon)$所需的算术运算量不超过$C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$；排列运算量不超过$C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}|\log\varepsilon|$.

证明 对固定的$J\in N$，$\bar{U}(\varepsilon)=:\bar{U}^{J+1}$，根据引理2.3.1、引理2.3.2和SOLVE的定义，对任意$0\leqslant j\leqslant J$，从$\bar{U}_j$到$\bar{U}_{j+1}$的算术运算量M_j满足

$$M_j \leqslant C\left(\sum_{\ell=0}^{K-1}\rho^{-\frac{\ell}{s}}\right)\varepsilon_j^{\frac{1}{s}}+C\left(\sum_{\ell=0}^{K-1}\rho^{-\frac{\ell}{s}}\left|\bar{v}^{\ell}\right|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X)}^{\frac{1}{s}}\right)\varepsilon_j^{\frac{1}{s}}+2\sum_{\ell=0}^{K-1}N_\ell+\#(\operatorname{supp}\bar{V}^K).$$

这里 N_ℓ 的定义同引理2.3.2. 从 $\bar{U}_j$ 到 $\bar{U}_{j+1}$ 的排列运算量 S_j 满足

$$S_j \leqslant \sum_{\ell=0}^{K-1}N_\ell\log N_\ell+\#(\operatorname{supp}\bar{V}^K)\log(\#(\operatorname{supp}\bar{V}^K)) .$$

首先估计 $\left|\bar{v}^\ell\right|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X)}$：由引理2.3.2，$\left\|\bar{W}^\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant C\left\|\bar{V}^\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}$. 因为 $\bar{V}^\ell=\bar{V}^{\ell-1}+\alpha_0(\bar{F}_{\ell-1}-\bar{W}^{\ell-1})$，所以 $\left\|\bar{V}^\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant C\left(\left\|\bar{V}^{\ell-1}\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}+\left\|\bar{F}_{\ell-1}\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\right)$. 由引理2.3.1，$\left\|\bar{F}_\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant C\left\|\bar{f}\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X)}$；另一方面，因为 $1\leqslant\ell\leqslant K$ 且 K 是固定的，所以 $\left\|\bar{V}^\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant C\left(\left\|\bar{V}^0\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}+\left\|\bar{f}\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X)}\right)$. 利用定理2.2.1和式(2-16)，$\left\|\bar{V}^0\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}=\left\|\bar{U}^j\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant\left\|\bar{U}\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}$，故 $\left\|\bar{V}^\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}\leqslant C$. 从而，$\left\|\bar{v}^\ell\right\|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X)}\leqslant C$.

下面估计 N_ℓ：因为 $\bar{V}^\ell=\bar{V}^{\ell-1}+\alpha_0(\bar{F}_{\ell-1}-\bar{W}^{\ell-1})$，所以

$$N_\ell^*\leqslant N_{\ell-1}^*+\#(\operatorname{supp}\bar{F}_{\ell-1})+\#(\operatorname{supp}\bar{W}^{\ell-1}), \tag{2-17}$$

其中 $N_\ell^*=:\#(\operatorname{supp}\bar{V}^\ell)$. 回想 $N_\ell=\#(\operatorname{supp}\bar{v}^\ell)$，从而 $N_\ell\leqslant N_\ell^*$. 注意到 $\bar{q}^{\ell-1}=\bar{q}_1^{\ell-1}-r\bar{q}_2^{\ell-1}=\bar{B}\bar{\omega}^{\ell-1}-r\bar{B}\bar{v}^{\ell-1}$. 由式(2-9)，有 $\#(\operatorname{supp}\bar{q}^{\ell-1})\leqslant C\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}^{\ell-1})+CN_{\ell-1}$. 进一步，$\#(\operatorname{supp}\bar{W}^{\ell-1})\leqslant\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}^{\ell-1})+\#(\operatorname{supp}\bar{q}^{\ell-1})\leqslant C\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}^{\ell-1})+CN_{\ell-1}$. 因为 $\bar{\omega}^{\ell-1}=\bar{\omega}_1^{\ell-1}+\bar{\omega}_2^{\ell-1}=\bar{\omega}_1^{\ell-1}+\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{p}^{\ell-1}$，所以利用命题2.2.3可知 $\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}^{\ell-1})\leqslant\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}_1^{\ell-1})+CN_{\ell-1}^*$. 因此，

$$\#(\operatorname{supp}\bar{W}^{\ell-1})\leqslant C\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}_1^{\ell-1})+CN_{\ell-1}^* . \tag{2-18}$$

相似地，$\#(\operatorname{supp}\bar{F}_{\ell-1})\leqslant\#(\operatorname{supp}\bar{f}_{\ell-1})+\#(\operatorname{supp}\bar{g}_{\ell-1})\leqslant C\Lambda_{f,\ell-1}$. 将此不等式与式(2-17)和式(2-18)相结合，有 $N_\ell^*\leqslant C(N_{\ell-1}^*+\Lambda_{f,\ell-1}+\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}_1^{\ell-1}))$. 注意到 $N_0^*=\#(\operatorname{supp}\bar{V}^0)=\#(\operatorname{supp}\bar{U}^j)$，并利用定理2.2.1，$N_0^*\leqslant a^{\frac{1}{s}}C_0^{\frac{1}{s}}\left|\bar{U}\right|_{\ell_\tau^{\omega}(J_X\times J_M)}^{\frac{1}{s}}\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$. 另一方面，引理2.3.1和引理2.3.2蕴涵 $\#\Lambda_{f,\ell}\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$ 和 $\#(\operatorname{supp}\bar{\omega}_1^\ell)\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$. 最后，$N_\ell\leqslant N_\ell^*\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$. 因此，计算 $\bar{U}(\varepsilon)$ 所需的算术运算量 $\sum_{j=0}^{J}M_j\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$. 而计算 $\bar{U}(\varepsilon)$ 所需的排列运算量 $\sum_{j=0}^{J}S_j\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{s}}\log|\varepsilon|$.

第 3 章　无散度小波与 Stokes 问题

基于混合弱形式的自适应算法虽然同时得到速度和压力的自适应逼近解，但其混合弱形式的非正定性导致许多额外计算．另一方面，为了分析流体的流动，人们更关心Stokes问题的速度场．鉴于速度场的无散度特点，利用无散度小波更加自然．事实上，在参考文献[9]中Urban于1996年就将无散度小波用于求解Stokes问题的数值解．其主要思想是利用无散度小波基构造试验空间，然后利用试验空间中的函数逼近方程的解．这种方法是一种线性逼近，不属于自适应小波方法的范畴．

3.1　Stokes问题的无散度自适应小波解

不同于Stokes问题的混合弱形式，选取新的试验函数空间

$$V_0^1(\Omega)^n =: \left\{\vec{v}\in H_0^1(\Omega)^n \middle| \operatorname{div}\vec{v}=0\right\}.$$

那么，Stokes问题的无散度弱形式为：找$\vec{u}\in V_0^1(\Omega)^n$使得

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \left\langle \vec{f},\ \vec{v}\right\rangle,\ \forall \vec{v}\in V_0^1(\Omega)^n. \qquad \text{(DSt)}$$

这里，$a(\vec{u},\vec{v})$和$\langle\cdot,\cdot\rangle$的定义与混合弱形式相同．因为压力被消去，所以需要通过后处理得到它的数值解．设$R_0^1(\Omega)^n$是$H_0^1(\Omega)^n$的闭子空间且满足$H_0^1(\Omega)^n = V_0^1(\Omega)^n \oplus R_0^1(\Omega)^n$，这里$\oplus$表示直和．那么后处理问题为：找$p\in L_0^2(\Omega) =: \left\{f\in L^2(\Omega) \middle| \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}$使得

$$b(\vec{v},p) = \left\langle \vec{f},\vec{v}\right\rangle - a(\vec{u},\vec{v}),\ \forall \vec{v}\in R_0^1(\Omega)^n. \qquad \text{(PSt)}$$

这里，$\vec{u}\in V_0^1(\Omega)^n$是(DSt)的解．双线性形式$b(\cdot,\cdot)$的定义也与混合弱形式形同．当$\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$为有界连通区域且具有Lipschitz边界时，（DSt）和（PSt）的解存在唯一．下面利用1.2节中区域上的无散度小波给出（DSt）的自适应逼近解和（PSt）的逼近解．

首先利用式（1-7）和式（1-8）离散化（DSt）和（PSt）．为此，设$\boldsymbol{D}=:2^{|\lambda|}\boldsymbol{I}_{\nabla^{df}\times\nabla^{df}}$，$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{D}^{-1}a(\Psi^{df},\Psi^{df})\boldsymbol{D}^{-1}$，$\overline{f}=\boldsymbol{D}^{-1}\left\langle\vec{f},\Psi^{df}\right\rangle^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{D}_0=:2^{|\lambda|}\boldsymbol{I}_{\overline{\nabla}\times\overline{\nabla}}$，$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{D}_0^{-1}a(\Psi^{\Delta},\Psi^{df})$，$\overline{f}_0=\boldsymbol{D}_0^{-1}\left\langle\vec{f},\Psi^{\Delta}\right\rangle^{\mathrm{T}}$．那么，有如下命题．

命题3.1.1　（DSt）$\Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}\overline{u}=\overline{f}$，其中$\vec{u}=\overline{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\Psi^{df}$；（PSt）$\Leftrightarrow \overline{p}=\alpha^{-1}(\overline{\boldsymbol{B}}\overline{u}-\overline{f}_0)$，其中$p=\overline{p}^{\mathrm{T}}\tilde{\psi}^{\varnothing}$，$\alpha$的定义见式（1-3）．

证明　注意到$V_0^1(\Omega)^n\subseteq H_0^0(\operatorname{div};\Omega)$．由定理1.2.2，（DSt）$\Leftrightarrow a\left(\vec{u},\ \vec{\psi}_{\bar\lambda}^{df}\right)=\left\langle\vec{f},\ \vec{\psi}_{\bar\lambda}^{df}\right\rangle$，$\forall\bar\lambda\in\nabla^{df}$．进一步，设$\vec{u}=\sum\limits_{\lambda\in\nabla^{df}} d_{\bar\lambda}\vec{\psi}_{\lambda}^{df}$，则

$$(\mathrm{DSt})\Leftrightarrow \sum_{\lambda'\in\nabla^{df}} d_{\bar{\lambda}'}a\left(\bar{\psi}_{\bar{\lambda}'}^{df},\ \bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}\right)=\left\langle \vec{f},\ \bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}\right\rangle,\forall\bar{\lambda}\in\nabla^{df}\Leftrightarrow \bar{A}\bar{u}=\bar{f}.$$

下面证明第二部分：设 $p=\sum_{\lambda'\in\nabla}\bar{p}_{\lambda'}\tilde{\psi}_{\lambda'}^{\varnothing}$，则 $(\mathrm{PSt})\Leftrightarrow -\sum_{\lambda'\in\nabla}\bar{p}_{\lambda'}(\tilde{\psi}_{\lambda'}^{\varnothing},\mathrm{div}\,\bar{\psi}_{\lambda}^{\Delta})=\left\langle \vec{f},\bar{\psi}_{\lambda}^{\Delta}\right\rangle-\sum_{\bar{\lambda}\in\nabla^{df}} d_{\bar{\lambda}}a(\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df},\ \bar{\psi}_{\lambda}^{\Delta}),\forall\lambda\in\bar{\nabla}$. 令 $\bar{C}=D_0^{-1}(\mathrm{div}\,\Psi^{\Delta},\tilde{\Psi}^{\varnothing})$．则 $(\mathrm{PSt})\Leftrightarrow \bar{C}\bar{p}=\bar{B}\bar{u}-\bar{f}_0$．因为 $(\bar{C})_{\lambda,\lambda'}=2^{-|\lambda|}(\mathrm{div}\,\bar{\psi}_{\lambda}^{\Delta},\ \tilde{\psi}_{\lambda'}^{\varnothing})=\alpha(\psi_{\lambda}^{\varnothing},\tilde{\psi}_{\lambda'}^{\varnothing})=\alpha\delta_{\lambda,\lambda'}$，所以 $\bar{C}=\alpha I$．故 $(\mathrm{PSt})\Leftrightarrow \bar{p}=\alpha^{-1}(\bar{B}\bar{u}-\bar{f}_0)$．

关于系数矩阵 $\bar{A}$，下列结论成立.

定理3.1.1 矩阵 $\bar{A}$ 对称正定且 $c_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant\|\bar{A}\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant C_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}$.

证明 由 $\bar{A}$ 的定义，易见它是对称的．对任意的 $\bar{u},\bar{v}\in\ell^2(\nabla^{df})$，令 $d=D^{-1}\bar{u}$，$e=D^{-1}\bar{v}$ 和 $\vec{u}=\sum_{\bar{\lambda}\in\nabla^{df}} d_{\bar{\lambda}}\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df},\vec{v}=\sum_{\lambda\in\nabla^{df}} e_{\lambda}\bar{\psi}_{\lambda}^{df}$．因为 $D=2^{|\bar{\lambda}|}I_{\nabla^{df}\times\nabla^{df}}$ 且 $|\bar{\lambda}|\geqslant 0$，所以 $d,e\in\ell^2(\nabla^{df})$．由定理1.2.2, $\vec{u},\vec{v}\in V_0^1(\Omega)^n$ 且

$$a(\vec{u},\ \vec{v})=a\left(\sum_{\lambda\in\nabla^{df}} d_{\bar{\lambda}}\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df},\ \sum_{\lambda'\in\nabla^{df}} e_{\bar{\lambda}'}\bar{\psi}_{\bar{\lambda}'}^{df}\right)=\sum_{\lambda\in\nabla^{df}}\sum_{\bar{\lambda}'\in\nabla^{df}} d_{\lambda}a\left(\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df},\bar{\psi}_{\bar{\lambda}'}^{df}\right)e_{\bar{\lambda}'}$$

$$=\sum_{\bar{\lambda}\in\nabla^{df}}\sum_{\bar{\lambda}'\in\nabla^{df}} d_{\lambda}2^{|\bar{\lambda}|}2^{-|\bar{\lambda}|}a\left(\bar{\psi}_{\lambda}^{df},\bar{\psi}_{\bar{\lambda}'}^{df}\right)2^{-|\lambda'|}2^{|\bar{\lambda}'|}e_{\bar{\lambda}'}=\left\langle\bar{A}\bar{u},\ \bar{v}\right\rangle.$$

注意到 $a(\vec{u},\vec{v})$ 是对称的，在 $H_0^1(\Omega)^n$ 上有界且 $a(\vec{u},\vec{u})\sim\|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^n}^2$．一方面，$\left|\left\langle\bar{A}\bar{u},\bar{v}\right\rangle\right|=|a(\vec{u},\vec{v})|\leqslant C\|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^n}\|\vec{v}\|_{H_0^1(\Omega)^n}\leqslant C_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}$．因此，$\bar{A}\bar{u}\in\ell^2(\nabla^{df})$ 且 $\|\bar{A}\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant C_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}$．另一方面，我们有

$$\left\langle\bar{A}\bar{u},\bar{u}\right\rangle=a(\vec{u},\vec{u})\geqslant c\|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^n}^2\geqslant c_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}^2.$$

这就证明了 $\bar{A}$ 的正定性．由 $c_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}^2\leqslant\left\langle\bar{A}\bar{u},\bar{u}\right\rangle\leqslant\|\bar{A}\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}$ 便有

$$c_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant\|\bar{A}\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant C_A\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}.$$

下面的结果表明矩阵 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 是拟稀疏的，它对自适应方法是必要的.

定理3.1.2 设 $\bar{A}=(a_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}'})_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}'\in\nabla^{df}}$，$\bar{B}=(b_{\lambda,\bar{\lambda}})_{\lambda\in\bar{\nabla},\bar{\lambda}\in\nabla^{df}}$，则

$$\left|a_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}'}\right|\lesssim 2^{-\left||\bar{\lambda}|-|\bar{\lambda}'|\right|\sigma}(1+d_1(\bar{\lambda},\bar{\lambda}'))^{-\beta},\ \left|b_{\lambda,\bar{\lambda}}\right|\lesssim 2^{-\left||\lambda|-|\bar{\lambda}|\right|\sigma}(1+d_2(\lambda,\bar{\lambda}))^{-\beta}.$$

这里，σ 和 β 的定义见式（1-6），$d_1(\bar{\lambda},\bar{\lambda}')=:2^{\min(|\bar{\lambda}|,|\bar{\lambda}'|)}\mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df},\mathrm{supp}\,\bar{\psi}_{\bar{\lambda}'}^{df})$，$d_2(\lambda,\bar{\lambda})=:2^{\min(|\lambda|,|\bar{\lambda}|)}\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\bar{\psi}_{\lambda}^{\Delta},\mathrm{supp}\,\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df})$.

证明 由式(1-7)可知 $\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}$ 是一个有限线性组合，即 $\bar{\psi}_{\bar{\lambda}}^{df}=:\sum_{\mu\in\Lambda(\bar{\lambda})}d_{\bar{\lambda},\mu}\bar{\psi}_{\mu}$．这里 $\Lambda(\bar{\lambda})\subseteq\nabla$ 的基数不依赖于 $\bar{\lambda}$ 且

$$\sum_{\mu\in\Lambda(\bar{\lambda})}\left|d_{\bar{\lambda},\mu}\right|\leqslant C,\tag{3-1}$$

C 是不依赖于 $\bar{\lambda}$ 的常数．注意到，对任意的 $\mu\in\Lambda(\bar{\lambda})$，有 $|\bar{\lambda}|=|\mu|$；对任意的 $\mu'\in\Lambda(\bar{\lambda}')$，有

$|\bar{\lambda}'|=|\mu'|$. 故

$$2^{-(|\bar{\lambda}'|+|\bar{\lambda}|)}\left|(\nabla\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}'},\nabla\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}})\right|=2^{-(|\bar{\lambda}'|+|\bar{\lambda}|)}\left|\sum_{\mu'\in\Lambda(\bar{\lambda}')}\sum_{\mu\in\Lambda(\bar{\lambda})}d_{\bar{\lambda}',\mu'}d_{\bar{\lambda},\mu}(\nabla\vec{\psi}_{\mu'},\nabla\vec{\psi}_{\mu})\right|$$
$$\leqslant\sum_{\mu'\in\Lambda(\bar{\lambda}')}\sum_{\mu\in\Lambda(\bar{\lambda})}\left|d_{\bar{\lambda}',\mu'}\right|\left|d_{\bar{\lambda},\mu}\right|\cdot 2^{-(|\mu'|+|\mu|)}\left|(\nabla\vec{\psi}_{\mu'},\nabla\vec{\psi}_{\mu})\right|.$$

因为对任意的 $\mu\in\Lambda(\bar{\lambda})$ 和 $\mu'\in\Lambda(\bar{\lambda}')$，$\mathrm{supp}\,\vec{\psi}_{\mu}\subseteq\mathrm{supp}\,\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}}$，$\mathrm{supp}\,\vec{\psi}_{\mu'}\subseteq\mathrm{supp}\,\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}'}$，所以 $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}},\mathrm{supp}\,\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}'})\leqslant\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\vec{\psi}_{\mu},\mathrm{supp}\,\vec{\psi}_{\mu'})$ 且 $d_1(\bar{\lambda},\bar{\lambda}')\leqslant d_1(\mu,\mu')$. 进一步利用式(1-4)，有

$$2^{-(|\mu'|+|\mu|)}\left|(\nabla\vec{\psi}_{\mu'},\nabla\vec{\psi}_{\mu})\right|\lesssim 2^{-||\mu|-|\mu'||\sigma}(1+d_1(\mu,\mu'))^{-\beta}=2^{-||\bar{\lambda}|-|\bar{\lambda}'||\sigma}(1+d_1(\mu,\mu'))^{-\beta}$$
$$\leqslant 2^{-||\bar{\lambda}|-|\bar{\lambda}'||\sigma}(1+d_1(\bar{\lambda},\bar{\lambda}'))^{-\beta}.$$

最后，利用式（3-1），$\left|a_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}'}\right|=2^{-(|\bar{\lambda}'|+|\bar{\lambda}|)}\left|(\nabla\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}'},\nabla\vec{\psi}^{df}_{\bar{\lambda}})\right|\lesssim 2^{-||\bar{\lambda}|-|\bar{\lambda}'||\sigma}(1+d_1(\bar{\lambda},\bar{\lambda}'))^{-\beta}$.

同理可证关于 $\left|b_{\lambda,\bar{\lambda}}\right|$ 的不等式.

综上所述，Stokes问题等价于离散线性方程组

$$\begin{cases}\bar{A}\bar{u}=\bar{f},\\ \bar{p}=\alpha^{-1}(\bar{B}\bar{u}-\bar{f}_0).\end{cases}$$

因为 $\bar{A}$ 是对称正定且拟稀疏的，所以可以直接利用参考文献[48]中椭圆算子方程的自适应小波方法求解. 我们只需在算法的最后一步增加关于压力的后处理即可.

由命题2.2.1知存在 $\alpha_0\in\mathbf{R}$ 使得 $\|I-\alpha_0\bar{A}\|_{\ell^2\to\ell^2}=:\rho<1$. 记 $\varepsilon_0=:c_A^{-1}\|\bar{f}\|_{\ell^2(\nabla^{df})}$，$\varepsilon_{j+1}=:a(d+1)\,\varepsilon_j$，其中 $0<a<1$，$d>1$. 定义

$$K=:\min\left\{\ell\in\mathbf{N}\,\middle|\,\rho^{\ell-1}(2\alpha_0\ell+\rho)\leqslant a\right\}.$$

SOLVE$[\varepsilon,\bar{A},\bar{B},\bar{f},\bar{f}_0]\to(\bar{u}(\varepsilon),\bar{p}(\varepsilon),\Lambda(\varepsilon))$:

（1）初始化，固定目标精度 ε，令 $\bar{u}^0=:0$，$\Lambda_0=\varnothing$ 和 $j=0$;

（2）如果 $\varepsilon_j\leqslant\varepsilon$，直接取 $\bar{u}(\varepsilon)=:\bar{u}^j$ 即可. 否则，令 $\bar{v}^0=:\bar{u}^j$.

① 对 $\ell=0,\cdots,K-1$，计算

$$\text{COARSE}[\bar{f},\rho^{\ell}\varepsilon_j]\to\bar{f}_{\ell}\text{ 和 APPLY }\bar{A}\,[\bar{v}^{\ell},\rho^{\ell}\varepsilon_j]\to\bar{\omega}^{\ell}.$$

并令 $\bar{v}^{\ell+1}=:\bar{v}^{\ell}+\alpha_0(\bar{f}_{\ell}-\bar{\omega}^{\ell})$.

② 应用COARSE$[\bar{v}^K,da\varepsilon_j]\to(\bar{v}^{j+1},\Lambda_{j+1})$，并且返回到（2）.

（3）最后，对（2）中的输出 $\bar{u}^j$，计算

$$\text{COARSE}[\bar{f}_0,\frac{\varepsilon_j}{2}\alpha]\to\bar{f}_j\quad\text{和}\quad\text{APPLY }\bar{B}[\bar{u}^j,\frac{\varepsilon_j}{2}\alpha]\to\bar{u}_j.$$

令 $\bar{p}(\varepsilon)=:\alpha^{-1}(\bar{u}_j-\bar{f}_j)$，下列误差估计成立.

定理3.1.3 设方程 $\bar{A}\bar{u}=\bar{f}$ 的解 $\bar{u}\in\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla^{df})$ 且 $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$，则

$$\|\bar{u}-\bar{u}(\varepsilon)\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant\varepsilon\leqslant a^{-1}C_0\,|\bar{u}|_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla^{df})}(\#\Lambda(\varepsilon))^{-s},$$
$$\|\bar{p}-\bar{p}(\varepsilon)\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}\leqslant(\alpha^{-1}C_B+1)\,\varepsilon.$$

证明 第一个不等式的证明见参考文献[48]中的定理5.7，在此只须证明第二个不等式：设（2）的输出为$\bar{u}^j$，则$\|\bar{u}-\bar{u}^j\|_{\ell^2(\nabla^{df})}\leqslant\varepsilon$．因为$\bar{p}(\varepsilon)=\alpha^{-1}(\bar{u}_j-\bar{f}_j)$，所以

$$\|\bar{p}-\bar{p}(\varepsilon)\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}=\alpha^{-1}\|\bar{\boldsymbol{B}}\bar{u}-\bar{f}_0-\bar{u}_j+\bar{f}_j\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}=\alpha^{-1}\|\bar{\boldsymbol{B}}\bar{u}-\bar{\boldsymbol{B}}\bar{u}^j+\bar{\boldsymbol{B}}\bar{u}^j-\bar{u}_j-\bar{f}_0+\bar{f}_j\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}$$

$$\leqslant\alpha^{-1}\|\bar{\boldsymbol{B}}(\bar{u}-\bar{u}^j)\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}+\alpha^{-1}\|\bar{\boldsymbol{B}}\bar{u}_j-\bar{u}_j\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}+\alpha^{-1}\|\bar{f}_0-\bar{f}_j\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}.$$

最后，利用定理2.2.1, 2.2.2及$\bar{\boldsymbol{B}}$在$\ell^2(\nabla^{df})$上的有界性，有

$$\|\bar{p}-\bar{p}(\varepsilon)\|_{\ell^2(\bar{\nabla})}\leqslant\alpha^{-1}\boldsymbol{C}_B\|\bar{u}-\bar{u}^j\|_{\ell^2(\nabla^{df})}+\varepsilon_j\leqslant(\alpha^{-1}\boldsymbol{C}_B+1)\,\varepsilon.$$

3.2 自适应小波Galerkin方法

无散度小波求解Stokes问题的优点在于处理正定算子$\bar{A}$．对这样的算子方程$\bar{A}\bar{u}=\bar{f}$，还有另外一种自适应小波方法(称之为椭圆算子方程的自适应小波Galerkin方法)．它是由Dahlke等人于1997年在参考文献[46]中首次提出的．四年后, Cohen, Dahmen和DeVore分析了它的逼近误差关于自由度的指数衰减．

为介绍这种自适应方法，两个基本的数值步骤是必要的：记$\ell^2(\Lambda)=:\{\bar{v}=(\bar{v}_\lambda)_{\lambda\in\nabla}\in\ell^2(\nabla)|\bar{v}_\lambda=0,\lambda\notin\Lambda\}$．定义截断算子$P_\Lambda:\ell^2(\nabla)\to\ell^2(\Lambda)$为

$$(P_\Lambda\bar{v})_\lambda=:\begin{cases}\bar{v}_\lambda, & \lambda\in\Lambda,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

GALERKIN给定一个有限子标集$\Lambda\subset\nabla$，GALERKIN表示通过解线性方程组$P_\Lambda\bar{A}\bar{u}_\Lambda=P_\Lambda\bar{f}$决定$\bar{u}$的逼近$\bar{u}_\Lambda\in\ell^2(\Lambda)$．

Galerkin解$\bar{u}_\Lambda$有一个重要性质：对任意满足$\#(\operatorname{supp}\bar{u}_1)\leqslant\#\Lambda$的$\bar{u}_1$，$\|\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\|\leqslant\|\bar{u}-\bar{u}_1\|$．

这里$\|\cdot\|^2=:\langle\bar{A}\cdot,\cdot\rangle$是$\ell^2(\nabla)$中的能量范数．

事实上，对任意的$\bar{v}\in\ell^2(\Lambda)$，有

$$\begin{aligned}\|\bar{u}-\bar{v}\|^2&=\langle\bar{A}(\bar{u}-\bar{v}),\ \bar{u}-\bar{v}\rangle_{\ell^2(\nabla)}\\&=\langle\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda+\bar{u}_\Lambda-\bar{v}),\ \bar{u}-\bar{u}_\Lambda+\bar{u}_\Lambda-\bar{v}\rangle_{\ell^2(\nabla)}\\&=\langle\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda),\ \bar{u}-\bar{u}_\Lambda\rangle_{\ell^2(\nabla)}+\langle\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda),\ \bar{u}_\Lambda-\bar{v}\rangle_{\ell^2(\nabla)}\\&\quad+\langle\bar{A}(\bar{u}_\Lambda-\bar{v}),\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\rangle_{\ell^2(\nabla)}+\langle\bar{A}(\bar{u}_\Lambda-\bar{v}),\ \bar{u}_\Lambda-\bar{v}\rangle_{\ell^2(\nabla)}\\&=\|\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\|^2+2\langle\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda),\ \bar{u}_\Lambda-\bar{v}\rangle_{\ell^2(\nabla)}+\|\bar{u}_\Lambda-\bar{v}\|^2.\end{aligned}$$

因为$\bar{A}\bar{u}=\bar{f},P_\Lambda\bar{A}\bar{u}_\Lambda=P_\Lambda\bar{f}$，所以$P_\Lambda\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda)=P_\Lambda\bar{A}\bar{u}-P_\Lambda\bar{A}\bar{u}_\Lambda=0$．进一步，

$$(\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda))_\lambda=0,\lambda\in\Lambda.$$

由$\bar{u}_\Lambda\in\ell^2(\Lambda),\bar{v}\in\ell^2(\Lambda)$可知$(\bar{u}_\Lambda-\bar{v})_\lambda=0,\lambda\notin\Lambda$. 因此,

$$\langle\bar{A}(\bar{u}-\bar{u}_\Lambda),\ \bar{u}_\Lambda-\bar{v}\rangle_{\ell^2(\nabla)}=0.$$

进一步，可得$\|\bar{u}-\bar{v}\|^2=\|\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\|^2+\|\bar{u}_\Lambda-\bar{v}\|^2\geqslant\|\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\|^2$. 即

$$\|\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\|=\inf_{\bar{v}\in\ell^2(\Lambda)}\|\bar{u}-\bar{v}\|.$$

GROW 给定了标集Λ和它的Galerkin解$\bar{u}_\Lambda$, GROW确定包含Λ的最小指标集$\tilde{\Lambda}$使得$\|P_{\tilde{\Lambda}}\gamma_\Lambda\|_{\ell^2(\nabla)}\geqslant\frac{1}{2}\|\gamma_\Lambda\|_{\ell^2(\nabla)}$，其中$\gamma_\Lambda=:\bar{f}-\bar{A}\bar{u}_\Lambda$. 记$\theta=\sqrt{1-(4C_A)^{-1}c_A}$，则$\|\bar{u}-\bar{u}_{\tilde{\Lambda}}\|\leqslant\theta\|\bar{u}-\bar{u}_\Lambda\|$.

Algorithm I:

（1）令$\Lambda_0=\varnothing$和$\gamma_{\Lambda_0}=\bar{f}$.

（2）对$j=0,1,2,\cdots$，首先利用GALERKIN，再利用GROW从Λ_j确定Λ_{j+1}.

Gohen, Dahmen和DeVore证明了下面的结论.

定理3.2.1 假设$\bar{A}$是对称正定拟稀疏矩阵，$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$且$s^*=:\min\left\{\frac{\sigma}{d}-\frac{1}{2},\ \frac{\beta}{d}-1\right\}$. 那么存在$\tilde{s}\in(0,s^*)$使得当$s\in(0,\ \tilde{s})$且$\bar{u}\in\ell_\tau^\omega(\nabla)$时，由Algorithm I得到的Galerkin逼近$\bar{u}_{\Lambda_k}$满足

$$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant C(\tau)\|\bar{u}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}(\#\Lambda_k)^{s}.\tag{3-2}$$

设$\bar{A}_\Lambda$是矩阵$\bar{A}$在Λ上的限制. 令$\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，则

$$\bar{A}_\Lambda=\begin{pmatrix}a_{\lambda_1\lambda_1}&a_{\lambda_1\lambda_2}&\cdots&a_{\lambda_1\lambda_n}\\a_{\lambda_2\lambda_1}&a_{\lambda_2\lambda_2}&\cdots&a_{\lambda_2\lambda_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{\lambda_n\lambda_1}&a_{\lambda_n\lambda_2}&\cdots&a_{\lambda_n\lambda_n}\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

证明上述定理的关键在于证明$\|\bar{A}_\Lambda^{-1}\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}$关于$\Lambda$的一致有界性（见参考文献[48]的定理4.9），其中用到了$\|\cdot\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}$是一个矩阵范数的事实. 下面的例子表明

$$\|A\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}=:\sup_{\|v\|_{\ell_\tau^\omega}\leqslant1}\|Av\|_{\ell_\tau^\omega}$$

不是一个矩阵范数.

例3.2.1 设$A=(a_{i,j})$是一个$n\times n$单位矩阵，$B=(b_{i,j})$是一个$n\times n$反单位矩阵，即$b_{i,j}=a_{i,n-j+1}$. 则对$\bar{v}\in\ell_\tau^\omega$和$\tau\in(0,2)$, $|A\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega}=|B\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega}=|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega}$且$\|A\bar{v}\|_{\ell^2}=\|B\bar{v}\|_{\ell^2}=\|\bar{v}\|_{\ell^2}$. 因此，$\|A\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}=\|B\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}=1$. 另一方面，对$v_0=(2,\ 0,\cdots,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $(A+B)v_0=(3,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 3)^{\mathrm{T}}$且$\|v_0\|_{\ell_\tau^\omega}=\max\{2,\ 2^{\frac{1}{\tau}}\}+\sqrt{5}$. 而且$\|(A+B)v_0\|_{\ell_\tau^\omega}=\max\{3,\ 3\cdot2^{\frac{1}{\tau}}\}+3\sqrt{2}=3\cdot2^{\frac{1}{\tau}}+3\sqrt{2}$. 因此,

$$\|A+B\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}\geqslant\frac{\|(A+B)\ v_0\|_{\ell_\tau^\omega}}{\|v_0\|_{\ell_\tau^\omega}}=\frac{3(2^{\frac{1}{\tau}}+\sqrt{2})}{\max\{2,\ 2^{\frac{1}{\tau}}\}+\sqrt{5}}=:c_\tau.$$

容易验证，对任意的$0<\tau<2$都有$c_\tau>2$. 最后，得到

$$\|A+B\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}>\|A\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega}+\|B\|_{\ell_\tau^\omega\to\ell_\tau^\omega},\ \forall 0<\tau<2.$$

幸运的是，当试验空间 $X=H^t$ 或 $X=H_0^t$ 时，一个椭圆算子方程的解满足 $u\in B_\tau^{sd+t}(L^\tau(\Omega))$，其中 $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$，这等价于 $\overline{u}\in\ell^\tau(\nabla)$．因此，在 ℓ^τ 的框架内分析Algorithm I的逼近误差更加合理．

设 $h\in\mathbf{R}^d, T_hf(x)=: f(x+h)$ 是平移算子，$\Delta_h^r=(T_h-I)^r$ 是步长为 h 的 r－阶差分算子．如果 $f\in L^p(\Omega), 0<p\leqslant\infty$，定义 f 在 $L^p(\Omega)$ 中的 r－阶连续模

$$\omega_r(f,t)_p=:\sup_{|h|\leqslant t}\left\|\Delta_h^r(f,\cdot)\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

令 $\alpha>0$, $0<p\leqslant\infty$ 和 $0<q\leqslant\infty, r=[\alpha]+1$．如果

$$|f|_{B_q^\alpha(L^p(\Omega))}=:\begin{cases}\left(\int_0^\infty\left[t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p\right]^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty,\\ \sup_{t\geqslant 0}t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p, & q=\infty.\end{cases}$$

是有限的，则称 $f\in B_q^\alpha(L^p(\Omega))\cdot B_q^\alpha(L^p(\Omega))$ 为Besov空间, Besov范数定义为

$$\|f\|_{B_q^\alpha(L^p(\Omega))}=:|f|_{B_q^\alpha(L^p(\Omega))}+\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

设 ϕ 和 ψ 分别为单变量尺度函数和小波函数，E 表示单位方体 $[0,1]^d$ 的非零顶点．对每一个 $e=(e_1,e_2,\cdots,e_d)\in E$，定义

$$\psi^e(x_1,x_2,\cdots,x_d)=:\psi^{e_1}(x_1)\psi^{e_2}(x_2)\cdots\psi^{e_d}(x_d),$$

其中，$\psi^0=\phi,\psi^1=\psi$．如果 D 表示 $\mathbf{R}^d$ 中所有二进制方体的集合，D_k 表示 D 中边长为 2^{-k} 的那些方体，则 $\left\{\psi_I^e, I\in D, e\in E\right\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 的Riesz基．即对 $f\in L^2(\mathbf{R}^d)$，有

$$f=\sum_{I\in D}\sum_{e\in E}c_I^e(f)\psi_I^e, c_I^e(f)=\left\langle f,\tilde{\psi}_I^e\right\rangle.$$

如果用 $\psi_\lambda,\lambda\in\nabla$ 表示 $\psi_I^e, I\in D, e\in E$，则每一个 $\lambda\in\nabla$ 对应一个 $I=2^{-j}(k+[0,1]^d)\in D$ 和一个 $e\in E$．常用 $|\lambda|=: j$ 表示对应尺度．

如果令 $\psi_{I,p}^e=:|I|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\psi_I^e$，则

$$f=\sum_{I\in D}\sum_{e\in E}c_{I,p}^e(f)\psi_{I,p}^e,\ c_{I,p}^e(f)=\langle f,\ \tilde{\psi}_{I,p'}^e\rangle,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

进一步，定义 $c_{I,p}(f)=:\left(\sum_{e\in E}\left|c_{I,p}^e(f)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，参考文献[26]中给出了下列刻画

$$(*)\quad |f|_{B_q^\alpha(L^p(R^d))}\sim\begin{cases}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha q}\left(\sum_{I\in D_k}c_{I,p}(f)^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty,\\ \sup_{k\in\mathbf{Z}}2^{k\alpha}\left(\sum_{I\in D_k}c_{I,p}(f)^p\right)^{\frac{1}{p}}, & q=\infty.\end{cases}$$

定理3.2.2 $u\in B_\tau^{sd+t}(L^\tau(\mathbf{R}^d))$当且仅当$\bar{u}\in\ell^\tau(\nabla)$.

证明 根据上述刻画可得

$$u\in B_\tau^{sd+t}(L^\tau(\mathbf{R}^d))\Leftrightarrow\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{k(t+ds)\tau}\sum_{I\in D_k}c_{I,\tau}(u)^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}}<\infty .$$

因为

$$c_{I,\tau}(u)^\tau=\sum_{e\in E}\left|c_{I,\tau}^e(u)\right|^\tau=\sum_{e\in E}\left|\left\langle u,\ \tilde{\psi}_{I,\tau'}^e\right\rangle\right|^\tau=|I|^{\tau(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau'})}\sum_{e\in E}\left|\left\langle u,\ \tilde{\psi}_I^e\right\rangle\right|^\tau ,$$

所以，有

$$\begin{aligned}u\in B_\tau^{sd+t}\left(L^\tau(\mathbf{R}^d)\right)&\Leftrightarrow\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{k(t+ds)\tau}\sum_{I\in D_k}|I|^{\tau(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau'})}\sum_{e\in E}\left|\left\langle u,\tilde{\psi}_I^e\right\rangle\right|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}}<\infty\\&\Leftrightarrow\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{k(t+ds)\tau}\sum_{I\in D_k}2^{-kd\tau s}\sum_{e\in E}\left|\left\langle u,\tilde{\psi}_I^e\right\rangle\right|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}}<\infty\\&\Leftrightarrow\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{I\in D_k}\sum_{e\in E}2^{kt\tau}\left|\left\langle u,\tilde{\psi}_I^e\right\rangle\right|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}}<\infty .\end{aligned}$$

当$H=H^t$或$H=H_0^t$时，$\bar{u}=D^{-1}\left\langle u,\tilde{\psi}_I^e\right\rangle, D=(2^{t|\lambda|}\delta_{\lambda\lambda'})_{\lambda\lambda'\in\nabla}$. 因此，

$$u\in B_\tau^{sd+t}(L^\tau(\mathbf{R}^d))\Leftrightarrow\bar{u}\in\ell^\tau(\nabla),\ \frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2} .$$

Algorithm I的缺点是对s的限制，为了克服这一问题，可以引入COARSE步骤，它主要依赖于下列结果.

定理3.2.3 设$\bar{v}\in\ell_\tau^\omega(\nabla), 0<\tau<2$. 对某个$\varepsilon>0$，$\bar{\omega}\in\ell^2(\nabla)$满足$\|\bar{v}-\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\varepsilon$. 令$N=N(\varepsilon)$是使得$\|\bar{\omega}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant 4\varepsilon$成立的最小整数. 这里，$\bar{\omega}_N=P_{\Lambda_N}\bar{\omega}$是在$\bar{\omega}$的前$N$个最大坐标上的截断. 则有

$$\|\bar{v}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant 5C_0\|\bar{v}\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N^{-s},$$

其中，$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}, C_0$是一个依赖于$\tau$的常数.

基于此，可以给出COARSE步骤和Algorithm II.

COARSE 给定指标集Λ和对应的Galerkin逼近$\bar{u}_\Lambda$，在定理3.2.3中取$\varepsilon=c_A^{-1}\|r_\Lambda\|_{\ell^2(\nabla)}$，$\bar{v}=:\bar{u}$和$\bar{\omega}=:\bar{u}_\Lambda$得到新的向量$\bar{\omega}_N$. 从而得到了新的指标集$\tilde{\Lambda}$（$\bar{\omega}_N$的非零坐标），进一步利用GALERKIN得到$\bar{u}_{\tilde{\Lambda}}$.

Algorithm II:

（1）令$\Lambda_0=\varnothing$和$r_{\Lambda_0}=\bar{f}$；

（2）对$j=0,1,2,\cdots$，按照如下方式从Λ_j确定Λ_{j+1}：令$\Lambda_{j,0}=:\Lambda_j$，对$\Lambda_{j,k-1}$先用

GALERKIN再用GROW决定 $\Lambda_{j,k}$．进一步对 $\Lambda_{j,k}$ 利用COARSE确定 $\tilde{\Lambda}_{j,k}$ 和 $\bar{u}_{\tilde{\Lambda}_{j,k}}$．如果 $\left\|r_{\tilde{\Lambda}_{j,k}}\right\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant \frac{1}{2}\left\|r_{\Lambda_j}\right\|_{\ell^2(\nabla)}$，则定义 $\Lambda_{j+1}=:\tilde{\Lambda}_{j,k}, k_j=:k$，终止迭代，否则继续．

Cohen, Dahmen和DeVore给出了Algorithm II的误差估计．

定理3.2.4 在定理3.2.1的假设下，如果 $\bar{u}\in \ell_\tau^\omega(\nabla)$，其中 $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$，$0<s<s^*$. 则由Algorithm II得到的Galerkin逼近 $\bar{u}_{\Lambda_k}$ 满足

$$\left\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_j}\right\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant 5c_A^{-\frac{1}{2}}C_A^{\frac{1}{2}}C_0\left\|\bar{u}\right\|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}(\#\Lambda_j)^{-s}. \tag{3-3}$$

3.3 最佳逼近界的估计

这一部分主要估计最佳 N－项逼近中的常数.

引理3.3.1 给定$s>0$和$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$．如果$\bar{v}\in \ell_\tau^\omega(\nabla)$，则

$$\left\|\bar{v}-P_{T_k}\bar{v}\right\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant \frac{a^{1+\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}a^{k\left(\frac{\tau}{2}-1\right)}\left|\bar{v}\right|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell_\tau^\omega(\nabla)},$$

其中，$a>1, T_k=\left\{\lambda\in\nabla, \left|\bar{v}_\lambda\right|\geqslant a^{-k}\right\}$.

证明 令 $\Lambda_j=:\left\{\lambda\in\nabla, a^{-j}\leqslant\left|\bar{v}_\lambda\right|<a^{-j+1}\right\}$，则 $\nabla-T_k=\bigcup_{j=k+1}^{\infty}\Lambda_j$．因为 $\bar{v}\in \ell_\tau^\omega(\nabla)$，所以 $\#\Lambda_j\leqslant\left|\bar{v}\right|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}a^{j\tau}$．进一步，可得

$$\left\|\bar{v}-P_{T_k}\bar{v}\right\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty}\left\|P_{\Lambda_j}\bar{v}\right\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty}a^{-j+1}(\#\Lambda_j)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty}a^{-j+1}\left(\left|\bar{v}\right|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}a^{j\tau}\right)^{\frac{1}{2}}=\left|\bar{v}\right|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\sum_{j=k+1}^{\infty}a^{-j+1+\frac{j\tau}{2}}=\frac{a^{1+\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}a^{k\left(\frac{\tau}{2}-1\right)}\left|\bar{v}\right|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}.$$

为简便，定义

$$C_\tau=:\inf_{a>1}\frac{a^2(1-a^{-\tau})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}. \tag{3-4}$$

显然，$C_\tau\geqslant a>1$.

命题3.3.1 给定 $s>0$ 和 $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$．如果 $\bar{v}\in \ell_\tau^\omega(\nabla)$，则

$$\sigma_N(\bar{v})\leqslant C_\tau\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N^{-s}.$$

证明 定义 $\Lambda_j=:\left\{\lambda\in\nabla, a^{-j}\leqslant\left|\bar{v}_\lambda\right|<a^{-j+1}\right\}$ 和 $T_k=:\bigcup_{j=-\infty}^{k}\Lambda_j$，则

$$\sum_{j=-\infty}^{k}\#\Lambda_j\leqslant|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau\sum_{j=-\infty}^{k}a^{j\tau}=|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau a^{k\tau}\sum_{j=0}^{\infty}a^{-j\tau}=\frac{a^\tau}{a^\tau-1}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau a^{k\tau}=:N_k .$$

由引理3.3.1可知

$$\|\overline{v}-P_{T_k}\overline{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\frac{a^{1+\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}a^{k\left(\frac{\tau}{2}-1\right)}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{a^2(a^\tau-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N_k^{-s}.$$

因为$a>1$，所以对每一个$N\geqslant1$，存在$k\in\mathbf{Z}$使得$N_k\leqslant N<N_{k+1}$．而且

$$\sigma_N(\overline{v})\leqslant\|\overline{v}-P_{T_k}\overline{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\frac{a^2(a^\tau-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N_k^{-s}=\frac{a^2(a^\tau-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}a^{s\tau}N_{k+1}^{-s}$$

$$=\frac{a^2(1-a^{-\tau})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N_{k+1}^{-s}\leqslant\frac{a^2(1-a^{-\tau})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\overline{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}N^{-s}.$$

由于$a>1$是任意的，所以结论成立．

表3-1中给出了C_τ的近似值，下确界在a_τ点取得．

表 3-1 C_τ 的近似值

τ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
a_τ	801.4	27.83	9.907	6.1	4.625	3.878	3.441	3.161	2.973	2.902
C_τ	738008.36	754.426	83.554	30.095	17.306	12.538	10.352	9.277	8.790	8.694

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.95
2.843	2.752	2.688	2.646	2.621	2.610	2.611	2.623	2.645	2.677	2.697
8.677	8.851	9.291	10.024	11.135	12.804	15.410	19.851	28.841	55.967	110.309

可以看出，当τ趋于0和2时，C_τ变得很大．事实上，下列结果成立．

命题3.3.2 式（3-4）中的常数C_τ满足

$$\lim_{\tau\to2^-}C_\tau=\lim_{\tau\to0^+}C_\tau=+\infty .$$

证明 为了证明$\lim\limits_{\tau\to2^-}C_\tau=+\infty$，定义$f(a)=:\dfrac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}$，则$C_\tau\geqslant\inf\limits_{a>1}f(a)$．因为$\lim\limits_{a\to1^+}f(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}f(a)=+\infty$，并且$f(a)$在$(1,+\infty)$上连续，所以存在$a_\tau>1$使得$f(a_\tau)=\inf\limits_{a>1}f(a)$．下面只须证明

$$\lim_{\tau\to2^-}f(a_\tau)=+\infty .$$

因为a_τ是一个极值点，并且$f(a)$是可微的，所以$f'(a_\tau)=0$．另一方面，$f'(a)=0$等价于$2a\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)=a^2\left(1-\frac{\tau}{2}a^{\frac{\tau}{2}-1}\right)$或$a=\left(2-\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{1-\frac{\tau}{2}}}$．因此，$\lim\limits_{\tau\to2^-}a_\tau=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\tau\to2^-}\left[\frac{1}{1-\frac{\tau}{2}}\ln\left(2-\frac{\tau}{2}\right)\right]}=\mathrm{e}$．进一

步, 可得

$$\lim_{\tau\to 2^-} f(a_\tau)=\lim_{\tau\to 2^-}\frac{a_\tau^{\frac{2}{\tau}}}{a_\tau-a_\tau^2}=+\infty .$$

下面证明 $\lim_{\tau\to 0^+} C_\tau=+\infty$. 注意到

$$\frac{a^2(1-a^{-\tau})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}=\frac{a^2(a^{-\tau})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}(a^\tau-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}\geqslant\frac{a^{2-\frac{\tau}{2}}}{(a^\tau-1)^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2}}}=:g(a) .$$

因此, 只须证明 $\lim_{\tau\to 0^+}\inf_{a>1} g(a)=+\infty$. 和上一部分相同, 存在 a_τ 使得 $g(a_\tau)=\inf_{a>1} g(a)$. 简单计算可知 $a_\tau=\left(2-\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{\tau}}$. 另一方面, $g(a)\geqslant\frac{a^{2-\frac{\tau}{2}}}{(a^\tau)^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2}}}=a$. 因此, $\lim_{\tau\to 0^+} g(a_\tau)\geqslant\lim_{\tau\to 0^+} a_\tau=+\infty$.

3.4 Algorithm I的误差分析

给定 $0<p<\infty$ 和 $0<q\leqslant\infty$, Lorentz空间 $\ell_{p,q}(\nabla)$ 定义为所有的序列 v 满足

$$|v|_{\ell_{p,q}}=:\begin{cases}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{p}}v_n^*)^q\frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty,\\ \sup_{n\geqslant 1} n^{\frac{1}{p}}v_n^*, & q=\infty\end{cases}$$

是有限的. 容易看出 $\ell_{p,p}(\nabla)=\ell^p(\nabla)$ 和 $\ell_{p,\infty}(\nabla)=\ell_p^\omega(\nabla)$.

引理3.4.1 设 $0<p_1<p_2<\infty$, $0<q_1, q_2\leqslant\infty$. 若 T 是 $\ell_{p_1,q_1}(\nabla)$ 和 $\ell_{p_2,q_2}(\nabla)$ 上的有界线性算子, 则 T 也是 $\ell_{p,q}(\nabla)$ 上的有界线性算子, 其中

$$\frac{1}{p}=:\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2},\ 0<q\leqslant\infty,\ 0<\theta<1 .$$

特别地, 当 $0<p_1=q_1\leqslant\infty, 0<p_2=q_2\leqslant\infty, p=q$ 时得到Riesz-Thorin定理: 设 $0<p_1<p_2\leqslant\infty$. 若 T 是 $\ell^{p_1}(\nabla)$ 和 $\ell^{p_2}(\nabla)$ 上的有界线性算子, 范数分别为 M_1 和 M_2, 则 T 也是 $\ell^p(\nabla)$ 上的有界线性算子, 并且范数满足 $M\leqslant M_1^{1-\theta}M_2^{\theta}$.

引理3.4.2 设 $\bar{A}$ 是对称正定且拟稀疏的, 则对任意的 $\tau\in(\tau^*, 2]$, $\bar{A}$ 在 $\ell^\tau(\nabla)$ 上是有界的; 而且存在 $\tilde{\tau}\in[1, 2)$ 和常数 $M>0$ 使得对任意的 $\Lambda\subset\nabla$ 和 $\tilde{\tau}\leqslant\tau\leqslant 2$, $\|\bar{A}_\Lambda^{1}\|_{\ell^\tau\to\ell^\tau}\leqslant M$.

证明 当 $\tau=2$ 时, $\bar{A}$ 的有界性可直接由引理2.1.1得到. 当 $\tau\in(\tau^*, 2)$, 存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\tau^*<\tau-\varepsilon<\tau<\tau+\varepsilon<2$, 由引理2.1.1, $\bar{A}$ 在 $\ell_{\tau-\varepsilon}^\omega(\nabla)$ 和 $\ell_{\tau+\varepsilon}^\omega(\nabla)$ 上有界. 因为 $\frac{1}{\tau}=\frac{1-\theta}{\tau+\varepsilon}+\frac{\theta}{\tau-\varepsilon}$, 其中 $0<\theta=:\frac{\tau-\varepsilon}{2\tau}<1$, 利用引理3.4.1, 对任意的 $\tau^*<\tau<2$, $\bar{A}$ 在 $\ell^\tau(\nabla)$ 上有界.

因为$\bar{A}$在$\ell^2(\nabla)$上是正定有界的，所以$\|\bar{A}_\Lambda\|\leqslant C_A$，$\|\bar{A}_\Lambda^{-1}\|\leqslant c_A^{-1}$．而且$\bar{A}_\Lambda$是正定的，这意味着$\bar{A}_\Lambda$的所有特征值介于$c_A$和$C_A$之间．另一方面，由$\bar{A}$的对称性知$\bar{A}_\Lambda$也是对称的．令$\bar{A}_\Lambda=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{D}_\Lambda\boldsymbol{T}$，这里$\boldsymbol{D}_\Lambda$是对角矩阵，$\boldsymbol{T}$是酉矩阵．对$\frac{1}{C_A}<\mu<\min\left\{\frac{1}{c_A},\ \frac{2}{C_A}\right\}$，定义$\boldsymbol{R}_\Lambda=:\boldsymbol{I}-\mu\bar{A}_\Lambda$，则

$$\|\boldsymbol{R}_\Lambda\|_{\ell^2\to\ell^2}=\|\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{D}_\Lambda\|_{\ell^2\to\ell^2}\leqslant\max\{1-\mu c_A,\mu C_A-1\}=:\alpha<1\ . \tag{3-5}$$

因为对所有的$\Lambda\subset\nabla$，$\|\bar{A}_\Lambda\|_{\ell^\tau\to\ell^\tau}\leqslant\|\bar{A}\|_{\ell^\tau\to\ell^\tau}$ 且$\|v_1+v_2\|_{\ell^\tau}\leqslant 2^{\frac{1-\tau}{\tau}}(\|v_1\|_{\ell^\tau}+\|v_2\|_{\ell^\tau})$，$\forall 0<\tau<1$，所以对固定的$\tau_0\in(\tau^*,2)$，

$$\|\boldsymbol{R}_\Lambda\|_{\ell^{\tau_0}\to\ell^{\tau_0}}=\|\boldsymbol{I}-\mu\bar{A}_\Lambda\|_{\ell^{\tau_0}\to\ell^{\tau_0}}\leqslant\max\{1,\ 2^{\frac{1-\tau_0}{\tau_0}}\}(1+\mu\|\bar{A}\|_{\ell^{\tau_0}(\nabla)\to\ell^{\tau_0}(\nabla)})=:C_0. \tag{3-6}$$

利用式（3-5）、式（3-6）和Riesz-Thorin定理，$\|\boldsymbol{R}_\Lambda\|_{\ell^\tau\to\ell^\tau}\leqslant C_0^\theta\alpha^{1-\theta}$，$\frac{1}{\tau}=\frac{1-\theta}{2}+\frac{\theta}{\tau_0}$．因为$\lim\limits_{\theta\to0}C_0^\theta\alpha^{1-\theta}=\alpha\leqslant r_0<1$，所以存在$\theta_0>0$使得对任意的$0<\theta\leqslant\theta_0$，$C_0^\theta\alpha^{1-\theta}\leqslant r_0<1$. 令$\frac{1}{\tau_1}=\frac{1-\theta_0}{2}+\frac{\theta_0}{\tau_0}$. 则对任意的$\tau_0<\tau_1\leqslant\tau\leqslant2$，$\|\boldsymbol{R}_\Lambda\|_{\ell^\tau\to\ell^\tau}\leqslant r_0<1$.　定义$\tilde{\tau}=\max\{1,\ \tau_1\}$，对任意的$\tilde{\tau}\leqslant\tau\leqslant2$，$\|\bar{A}_\Lambda\bar{v}\|_{\ell^\tau}=\mu^{-1}\|\bar{v}-\boldsymbol{R}_\Lambda\bar{v}\|_{\ell^\tau}\geqslant\mu^{-1}(\|\bar{v}\|_{\ell^\tau}-\|\boldsymbol{R}_\Lambda\bar{v}\|_{\ell^\tau})\geqslant\mu^{-1}(1-r_0)\|\bar{v}\|_{\ell^\tau}$．进一步，$\|\bar{A}_\Lambda^{-1}\|_{\ell^\tau\to\ell^\tau}\leqslant M=:\frac{\mu}{1-r_0}$．引理得证.

注意到引理3.4.2中的常数M不依赖于τ，而在参考文献[48]中并非如此．下面的引理表明$C_A'=:\|\bar{A}\|_{\ell^\tau(\nabla)\to\ell^\tau(\nabla)}$可以被一致常数$C_0$控制.

引理3.4.3　设$\bar{A}$关于$\sigma>n$和$\beta>n$拟稀疏，则$\|\bar{A}\|_{\ell^\tau(\nabla)\to\ell^\tau(\nabla)}\leqslant C_0$对$1\leqslant\tau\leqslant\infty$一致成立.

证明　由拟稀疏的定义，有

$$\sum_{\lambda\in\nabla}|a_{\lambda,\mu}|\leqslant C_1\sum_{\lambda\in\nabla}2^{-||\lambda|-|\mu||\sigma}(1+d(\lambda,\ \mu))^{-\beta}=C_1\sum_{j'\geqslant0}2^{-|j'-j|\sigma}\sum_{|\lambda|=j'}(1+d(\lambda,\ \mu))^{-\beta}.$$

进一步利用参考文献[48]中的估计$\sum\limits_{|\lambda|=j'}(1+d(\lambda,\mu))^{-\beta}\leqslant C_2 2^{d\max\{0,\ j'-j\}}$ 得到

$$\sum_{\lambda\in\nabla}|a_{\lambda,\mu}|\leqslant C_1C_2\sum_{j'\geqslant0}2^{-|j'-j|\sigma}2^{d\max\{0,j'-j\}}=C_1C_2\sum_{j'\geqslant j}2^{-(j'-j)(\sigma-d)}+C_1C_2\sum_{j'<j}2^{-(j-j')\sigma}\leqslant C_0\ .$$

类似可得$\sum\limits_{\mu\in\nabla}|a_{\lambda,\mu}|\leqslant C_0$. 因此，对$v=(v_\mu)_{\mu\in\nabla}\in\ell^1(\nabla)$，

$$\|\bar{A}v\|_1=\sum_{\lambda\in\nabla}\left|\sum_{\mu\in\nabla}a_{\lambda,\mu}v_\mu\right|\leqslant\sum_{\lambda\in\nabla}\ \sum_{\mu\in\nabla}|a_{\lambda,\mu}||v_\mu|\leqslant C_0\|v\|_1.$$

对$v=(v_\mu)_{\mu\in\nabla}\in\ell^\infty(\nabla)$，$\|\bar{A}v\|_\infty=\sup\limits_{\lambda\in\nabla}\left|\sum\limits_{\mu\in\nabla}a_{\lambda,\mu}v_\mu\right|\leqslant\sup\limits_{\lambda\in\nabla}\sum\limits_{\mu\in\nabla}|a_{\lambda,\mu}||v_\mu|\leqslant C_0\|v\|_\infty$. 因此，$\|\bar{A}\|_{\ell^1(\nabla)\to\ell^1(\nabla)}\leqslant C_0$ 且$\|\bar{A}\|_{\ell^\infty(\nabla)\to\ell^\infty(\nabla)}\leqslant C_0$．最后，利用Riesz-Thorin定理，有

$$\|\bar{A}\|_{\ell^\tau(\nabla)\to\ell^\tau(\nabla)}\leqslant\|\bar{A}\|^{\theta}_{\ell^1(\nabla)\to\ell^1(\nabla)}\|\bar{A}\|^{1-\theta}_{\ell^\infty(\nabla)\to\ell^\infty(\nabla)}\leqslant C_0,\forall 1<\tau<\infty.$$

下面的引理是关于GROW步骤的估计.

引理3.4.4 设$\bar{v}\in\ell^\tau(\nabla)$, $\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$, $0<s\leqslant\frac{1}{2}$. 给定$\Lambda\subset\nabla$, 如果$\tilde{\Lambda}\subset\nabla$ 是包含Λ的最小的指标集且$\|P_{\tilde{\Lambda}}\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\geqslant\frac{1}{2}\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}$, 则

$$\#(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda)\leqslant[(2C_\tau)^{\frac{1}{s}}+1]\|\bar{v}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}\|\bar{v}\|^{-\frac{1}{s}}_{\ell^2(\nabla)}.$$

证明 令Λ_N表示对应$|\bar{v}_\lambda|$前N个最大分量的指标集. 由命题3.3.1, 有

$$\|\bar{v}-P_{\Lambda_N}\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant C_\tau|\bar{v}|_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}N^{-s}\leqslant C_\tau\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}N^{-s}.$$

选择最小可能的N使得$2C_\tau\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}N^{-s}\leqslant\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}$. 因为$C_\tau\geqslant 1$和$\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$, 所以$N>1$且$2C_\tau\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}(N-1)^{-s}>\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}$. 进一步,

$$\|P_{\Lambda\cup\Lambda_N}\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\geqslant\|P_{\Lambda_N}\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\geqslant\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}-\|\bar{v}-P_{\Lambda_N}\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\geqslant\frac{1}{2}\|\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}.$$

故

$$\begin{aligned}N&\leqslant 1+\left(2C_\tau\|\bar{v}\|^{-1}_{\ell^2(\nabla)}\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left(\|\bar{v}\|^{-1}_{\ell^2(\nabla)}\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}\right)^{\frac{1}{s}}+\left(2C_\tau\|\bar{v}\|^{-1}_{\ell^2(\nabla)}\|\bar{v}\|_{\ell^\tau(\nabla)}\right)^{\frac{1}{s}}\\&=\left[(2C_\tau)^{\frac{1}{s}}+1\right]\|\bar{v}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}\|\bar{v}\|^{-\frac{1}{s}}_{\ell^2(\nabla)}.\end{aligned}$$

最后, 由$\#(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda)\leqslant\#((\Lambda\cup\Lambda_N)\setminus\Lambda)\leqslant\#\Lambda_N=N$直接可得结论.

现在给出Algorithm I 在ℓ^τ框架内的误差估计.

定理3.4.1 设$\bar{A}$对称正定且关于$\sigma>n$和$\beta>n$拟稀疏, 则存在$\tilde{\tau}\in[1,2)$使得对任意的$\tau\in[\tilde{\tau},2)$和$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$, Algorithm I 得到的Galerkin逼近$\bar{u}_{\Lambda_k}$满足

$$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant CC_\tau\|\bar{u}\|_{\ell^\tau(\nabla)}(\#\Lambda_k)^{-s}.$$

证明 定义$C_k=:(\#\Lambda_k)\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|^{\frac{1}{s}}$. 只须证明$C_k^s\leqslant CC_\tau\|\bar{u}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$. 利用引理3.4.4,

$$\#\Lambda_{k+1}\leqslant\#\Lambda_k+\left[(2C_\tau)^{\frac{1}{s}}+1\right]\|r_{\Lambda_k}\|^{-\frac{1}{s}}_{\ell^2(\nabla)}\|r_{\Lambda_k}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}.$$

因为$C_\tau\geqslant 1$, 所以$\#\Lambda_{k+1}\leqslant\#\Lambda_k+2(2C_\tau)^{\frac{1}{s}}\|r_{\Lambda_k}\|^{-\frac{1}{s}}_{\ell^2(\nabla)}\|r_{\Lambda_k}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}$. 注意到$\bar{u}_{\Lambda_k}=\bar{A}^{-1}_{\Lambda_k}P_{\Lambda_k}\bar{f}=\bar{A}^{-1}_{\Lambda_k}P_{\Lambda_k}\bar{A}\bar{u}$. 由引理3.4.2和引理3.4.3, $\|\bar{u}_{\Lambda_k}\|_{\ell^\tau(\nabla)}\leqslant C\|\bar{u}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$. 类似地, $r_{\Lambda_k}=\bar{f}-\bar{A}\bar{u}_{\Lambda_k}=\bar{A}\bar{u}-\bar{A}\bar{u}_{\Lambda_k}$满足$\|r_{\Lambda_k}\|_{\ell^\tau(\nabla)}\leqslant C\|\bar{u}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$和$\|r_{\Lambda_k}\|_{\ell^2(\nabla)}\geqslant C\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|$. 这里及以后, C只表示不依赖于τ的常数, 在不同的地方, 其值可能不同. 因为$\tau\geqslant\tilde{\tau}\geqslant 1$, 所以$0<s<1$且

$$\#\Lambda_{k+1}\leqslant\#\Lambda_k+(CC_T)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|^{-\frac{1}{s}}.$$

由$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|\leqslant\theta\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_{k-1}}\|$可知

$$C_k=:(\#\Lambda_k)\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|^{\frac{1}{s}}\leqslant\theta^{\frac{1}{s}}C_{k-1}+\theta^{\frac{1}{s}}(CC_\tau)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}.$$

依此类推，$C_k\leqslant C_1+(CC_\tau)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{\frac{j}{s}}$．注意到$\Lambda_0=\varnothing$和$\bar{u}_{\Lambda_0}=0$．进而有

$$C_1=(\#\Lambda_1)\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_1}\|^{\frac{1}{s}}\leqslant(CC_\tau)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}\|\bar{u}\|^{-\frac{1}{s}}\theta^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}\leqslant(CC_\tau)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}.$$

因此，$C_k\leqslant C_1+(CC_\tau)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{\frac{j}{s}}\leqslant\left(\sum_{j=0}^{\infty}\theta^{\frac{j}{s}}\right)(CC_\tau)^{\frac{1}{s}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{s}}_{\ell^\tau(\nabla)}$．因为对任意的$a,b>0$和$0<s<1$，$(a+b)^s\leqslant a^s+b^s$，所以当$\sum_{j=1}^{\infty}a_j$收敛时，$\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j\right)^s\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}a_j^s$．最后可得$C_k^s\leqslant CC_\tau\|\bar{u}\|_{\ell^\tau(\nabla)}$．定理得证.

注记3.4.1　因为$\lim\limits_{\tau\to2^-}C_\tau=+\infty$，所以当$\tau$接近2时，定理3.4.1中的估计

$$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant(CC_\tau)\|\bar{u}\|_{\ell^\tau(\nabla)}(\#\Lambda_k)^{-s}$$

没有意义．然而$\tau=2$或$s=0$时，对$\bar{u}_{\Lambda_k}=\bar{A}_{\Lambda_k}^{-1}P_{\Lambda_k}\bar{A}\bar{u}$利用引理3.4.2得$\|\bar{u}_{\Lambda_k}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant C\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla)}$．因此，$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_k}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant C\|\bar{u}\|_{\ell^2(\nabla)}$．

3.5　Algorithm II的误差分析

给定$\bar{v}\in\ell^2(\nabla)$和$\eta>0$，定义阈值算子

$$(\Gamma_\eta\bar{v})_\lambda=:\begin{cases}\bar{v}_\lambda, & |\bar{v}_\lambda|\geqslant\eta,\\ 0, & |\bar{v}_\lambda|<\eta.\end{cases}$$

引理3.5.1　给定$\bar{v}\in\ell_\tau^\omega(\nabla),0<\tau<2$．如果$\bar{\omega}\in\ell^2(\nabla)$满足$\|\bar{v}-\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\varepsilon,\varepsilon>0$，则对任意的$\eta>0$和$a,b,c>1$，有

$$\|\bar{v}-\Gamma_\eta\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\frac{b\varepsilon}{b-1}+\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\eta^{1-\frac{\tau}{2}},$$

$$\#\{\lambda\in\nabla|(\Gamma_\eta\bar{\omega})_\lambda\neq0\}\leqslant\left(\frac{c}{c-1}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2+c^\tau|\bar{v}|^\tau_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}\eta^{-\tau}.$$

证明　因为$a>1,\eta>0$，存在唯一的整数k使得$a^{-k}<\eta\leqslant a^{-k+1}$．令$T_k=:\{\lambda\in\nabla,|\bar{v}_\lambda|\geqslant a^{-k}\}$，则$\|\bar{v}-\Gamma_\eta\bar{v}\|^2_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\|\bar{v}-P_{T_{k-1}}\bar{v}\|^2_{\ell^2(\nabla)}$．由引理3.3.1，可得

$$\|\bar{v}-P_{T_{k-1}}\bar{v}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\frac{a^{1+\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}a^{(k-1)\left(\frac{\tau}{2}-1\right)}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell_\tau^\omega(\nabla)},$$

$$\left\|\bar{v}-\Gamma_{\eta}\bar{v}\right\|_{\ell^2(\nabla)}^2 \leqslant \frac{a^{2+\tau}}{(a-a^{\frac{\tau}{2}})^2}\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau \ a^{(1-k)(2-\tau)} \leqslant \left(\frac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}\right)^2\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau \ \eta^{2-\tau}. \qquad (3\text{-}7)$$

定义 $\Lambda_1=:\left\{\lambda\in\nabla\left\|\bar{\omega}_\lambda\right|\geqslant\eta\right\}$，$\Lambda_2=:\left\{\lambda\in\nabla\left\|\bar{\omega}_\lambda\right|<\eta,\left|\bar{v}_\lambda\right|\geqslant b\eta\right\}$ 和 $\Lambda_3=:\left\{\lambda\in\nabla\left\|\bar{\omega}_\lambda\right|<\eta,\right.$ $\left.\left|\bar{v}_\lambda\right|<b\eta\right\}$. 则

$$\left\|\bar{v}-\Gamma_{\eta}\bar{\omega}\right\|_{\ell^2(\nabla)}^2=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_1}+\sum_{\lambda\in\Lambda_2}+\sum_{\lambda\in\Lambda_3}\right)\left|\bar{v}_\lambda-(\Gamma_{\eta}\bar{\omega})_\lambda\right|^2$$
$$=\sum_{\lambda\in\Lambda_1}\left|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda\right|^2+\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\left|\bar{v}_\lambda\right|^2+\sum_{\lambda\in\Lambda_3}\left|\bar{v}_\lambda\right|^2.$$

对 $\lambda\in\Lambda_2$，由 $\left|\bar{\omega}_\lambda\right|<\eta<\frac{1}{b}\left|\bar{v}_\lambda\right|$, $\left|\bar{v}_\lambda\right|\leqslant\left|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda\right|+\left|\bar{\omega}_\lambda\right|\leqslant\left|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda\right|+\frac{1}{b}\left|\bar{v}_\lambda\right|$. 因此,

$$\left|\bar{v}_\lambda\right|\leqslant\frac{b}{b-1}\left|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda\right|,$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_1}\left|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda\right|^2+\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\left|\bar{v}_\lambda\right|^2\leqslant\left(\frac{b}{b-1}\right)^2\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda\right|^2\leqslant\left(\frac{b\varepsilon}{b-1}\right)^2.$$

另一方面, 由式（3-7）可得

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_3}\left|\bar{v}_\lambda\right|^2\leqslant\sum_{\{\lambda\in\nabla,\ |\bar{v}_\lambda|<b\eta\}}\left|\bar{v}_\lambda\right|^2=\left\|\bar{v}-\Gamma_{b\eta}\bar{v}\right\|^2\leqslant\left(\frac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}\right)^2 b^{2-\tau}\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau\eta^{2-\tau}.$$

因此,

$$\left\|\bar{v}-\Gamma_{\eta}\bar{\omega}\right\|_{\ell^2(\nabla)}^2\leqslant\left(\frac{b\varepsilon}{b-1}\right)^2+\left(\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}\right)^2\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau\eta^{2-\tau}.$$

进一步, 可得

$$\left\|\bar{v}-\Gamma_{\eta}\bar{\omega}\right\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\frac{b\varepsilon}{b-1}+\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^{\frac{\tau}{2}}\eta^{1-\frac{\tau}{2}}.$$

第一部分得证. 为了证明第二个不等式, 定义

$$\Lambda_4=:\left\{\lambda\in\nabla\left\|\bar{\omega}_\lambda\right|\geqslant\eta,\left|\bar{v}_\lambda\right|>\frac{\eta}{c}\right\},$$

$$\Lambda_5=:\left\{\lambda\in\nabla\left\|\bar{\omega}_\lambda\right|\geqslant\eta,\left|\bar{v}_\lambda\right|\leqslant\frac{\eta}{c}\right\}.$$

容易得 $\#\Lambda_4\leqslant\left\{\lambda\in\nabla\left\|\bar{v}_\lambda\right|>\frac{\eta}{c}\right\}\leqslant c^\tau\left|\bar{v}\right|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}^\tau\eta^{\tau}$. 注意到

$$\left[\left(1-\frac{1}{c}\right)\eta\right]^2(\#\Lambda_5)\leqslant\sum_{\lambda\in\Lambda_5}|\bar{v}_\lambda-\bar{\omega}_\lambda|^2\leqslant\varepsilon^2,$$

故$\#\Lambda_5\leqslant\left(\frac{c}{c-1}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2$. 因此，可得

$$\#\left\{\lambda\in\nabla\middle|(\Gamma_\eta\bar{\omega})_\lambda\neq 0\right\}=\#\Lambda_4+\#\Lambda_5\leqslant\left(\frac{c}{c-1}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2+c^\tau|\bar{v}|^\tau_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}\eta^{-\tau}.$$

下面的引理改进了定理3.2.3.

引理3.5.2　设$\bar{v}\in\ell^\omega_\tau(\nabla), 0<\tau<2$. $\bar{\omega}\in\ell^2(\nabla)$满足$\|\bar{v}-\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\varepsilon, \varepsilon>0$. 对固定的$d>2$，令$N=N(\varepsilon)$是使得$\|\bar{\omega}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant d\varepsilon$成立的最小整数. 这里，$\bar{\omega}_N=P_{\Lambda_N}\bar{\omega}$. 则对任意的$a, c>1$和$b>\frac{d-1}{d-2}$，有

$$\|\bar{v}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant(d+1)\ C_0(a,\ b,\ c)|\bar{v}|_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}N^{s},$$

其中，$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$. 而且

$$C_0(a,b,c)=:\left\{\left(\frac{c}{c-1}\right)^2\left[\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{2+\frac{1}{s}}+c^\tau\left[\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{1}{s}}\right\}^{s}.$$

证明　可以假设$\|\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}>d\varepsilon$，否则，$\bar{\omega}_N=0$满足要求的不等式. 令$\eta=:\min\{|\bar{\omega}_N(\lambda)|, \bar{\omega}_N(\lambda)\neq 0\}$. 则对任意的$\eta'>\eta$，

$$\|\bar{\omega}-\Gamma_{\eta'}\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}>d\varepsilon.$$

进一步，由引理3.5.1，可得

$$\begin{aligned}(d-1)\varepsilon&<\|\bar{\omega}-\Gamma_{\eta'}\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}-\|\bar{v}-\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}\\&\leqslant\|\bar{v}-\Gamma_{\eta'}\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}\leqslant\frac{b\varepsilon}{b-1}+\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}(\eta')^{1-\frac{\tau}{2}}.\end{aligned}$$

因此，$\left(d-1-\frac{b}{b-1}\right)\varepsilon\leqslant\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}(\eta')^{1-\frac{\tau}{2}}\leqslant\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}\eta^{1-\frac{\tau}{2}}=\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}\eta^{s\tau}$.

$$\frac{1}{\eta}\leqslant\left[\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}|\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^\omega_\tau(\nabla)}\varepsilon^{-1}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{1}{s\tau}}.\tag{3-8}$$

由N和η的定义可知$N \leqslant \#\left\{\lambda \in \nabla \middle| (\Gamma_{\eta}\bar{\omega})_{\lambda} \neq 0\right\}$．进一步，

$$N \leqslant \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 + c^{\tau} |\bar{v}|^{\tau}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \eta^{-\tau}.$$

下面分别估计右端的两项：利用式（3-8）可得

$$\left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 \leqslant \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \varepsilon^2 \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}} |\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \varepsilon^{-1}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{2}{s\tau}}$$

$$=\left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}}}{(a-a^{\frac{\tau}{2}})\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{2+\frac{1}{s}} |\bar{v}|^{\frac{1}{s}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \varepsilon^{\frac{1}{s}}.$$

$$c^{\tau} |\bar{v}|^{\tau}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \eta^{\tau} \leqslant c^{\tau} |\bar{v}|^{\tau}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}} |\bar{v}|^{\frac{\tau}{2}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \varepsilon^{-1}}{(a-a^{\frac{\tau}{2}})\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$=c^{\tau} \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}}}{(a-a^{\frac{\tau}{2}})\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{1}{s}} |\bar{v}|^{\frac{1}{s}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \varepsilon^{-\frac{1}{s}}.$$

因此，可得

$$N \leqslant \left\{\left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{2+\frac{1}{s}} + c^{\tau} \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{1}{s}}\right\} |\bar{v}|^{\frac{1}{s}}_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} \varepsilon^{\frac{1}{s}},$$

等价于

$$\varepsilon \leqslant \left\{\left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{2+\frac{1}{s}} + c^{\tau} \left[\frac{a^2 b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right]^{\frac{1}{s}}\right\}^{s} |\bar{v}|_{\ell^{\omega}_{\tau}(\nabla)} N^{s}.$$

最后，可得

$$\|\bar{v}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant \|\bar{v}-\bar{\omega}\|_{\ell^2(\nabla)}+\|\bar{\omega}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant (1+d)\ C_0(a,b,c)|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} N^{s}.$$

下面的主要定理改进了定理3.2.4.

定理3.5.1 若$\bar{u}\in \ell_\tau^\omega(\nabla)$，$\frac{1}{\tau}=s+\frac{1}{2}$，$0<s<s^*$. 则Algorithm Ⅱ得到的$\Lambda_j$满足

$$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_j}\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant (d+1)\ c_A^{-\frac{1}{2}} C_A^{\frac{1}{2}} C_0 |\bar{u}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)} (\#\Lambda_j)^{s},$$

其中，$C_0=:\min\limits_{a,c>1,b>\frac{d-1}{d-2}} C_0(a,b,c)$.

证明 首先证明$C_0(a,b,c)$在某个$a_0,c_0>1$和$b_0>\frac{d-1}{d-2}$处达到最小值C_0．注意到$A(a)=:\frac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}$在$(1,+\infty)$上连续，而且$\lim\limits_{a\to 1^+}A(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}A(a)=+\infty$．因此，$A$在某个$a_0>1$处达到最小值$A_0$．类似地，$\frac{b^{1-\frac{\tau}{2}}}{d-2-\frac{1}{b-1}}$在某个$b_0>\frac{d-1}{d-2}$处达到最小值．因此，$\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}$在$(a_0,b_0)$处达到最小值$m_0$. 定义

$$f(c)=\left[\left(\frac{c}{c-1}\right)^2 m_0^{2+\frac{1}{s}}+c^\tau m_0^{\frac{1}{s}}\right]^s.$$

显然，$f(c)$在$(1,+\infty)$上连续，而且

$$\lim_{c\to 1^+} f(c)=\lim_{c\to+\infty} f(c)=+\infty.$$

因此，$f(c)$在某个$c_0>1$处达到最小值．最后，$C_0(a,b,c)$在(a_0,b_0,c_0)处取得最小值．令$N=\#\Lambda_j$，则

$$\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_j}\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant c_A^{-\frac{1}{2}}\|\bar{u}-\bar{u}_{\Lambda_j}\| \leqslant c_A^{-\frac{1}{2}}\|\bar{u}-\bar{\omega}_N\| \leqslant$$

$$c_A^{-\frac{1}{2}}C_A^{\frac{1}{2}}\|\bar{u}-\bar{\omega}_N\|_{\ell^2(\nabla)} \leqslant (d+1)\ c_A^{\frac{1}{2}}C_A^{\frac{1}{2}}C_0(a,b,c)|\bar{v}|_{\ell_\tau^\omega(\nabla)}(\#\Lambda_j)^{-s}.$$

注记3.5.1 容易验证$\lim\limits_{\tau\to 2^-} C_0=+\infty$. 事实上，由$C_0(a,b,c)$的定义可得

$$C_0(a,b,c)=\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\left[\left(\frac{c}{c-1}\right)^2\left(\frac{a^2b^{1-\frac{\tau}{2}}}{\left(a-a^{\frac{\tau}{2}}\right)\left(d-2-\frac{1}{b-1}\right)}\right)^2+c^\tau\right]^s.$$

因为$c>1$, $b>\dfrac{d-1}{d-2}>1$，可得

$$C_0(a,b,c)\geqslant\frac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}\times\frac{b^{1-\frac{\tau}{2}}}{d-2-\dfrac{1}{b-1}}\geqslant\frac{1}{d-2}\times\frac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}.$$

进一步，有

$$C_0=:\min_{a,c>1,b>\frac{d-1}{d-2}}C_0(a,b,c)\geqslant\frac{1}{d-2}\min_{a>1}\frac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}.$$

从命题3.3.2的证明过程可知，$\lim\limits_{\tau\to2^-}\min\limits_{a>1}\dfrac{a^2}{a-a^{\frac{\tau}{2}}}=+\infty$，从而$\lim\limits_{\tau\to2^-}C_0=+\infty$. 这说明当$\tau$接近2时，定理3.5.1中的估计并不好．然而，不能将定理3.5.1延伸到$\tau=2$的情形．因为$\ell_2^{\omega}(\nabla)$未必包含在$\ell^2(\nabla)$．事实上，$v\in\ell_2^{\omega}(\nabla)\setminus\ell^2(\nabla)$，其中$v(n)=n^{-\frac{1}{2}}$.

给定$\tau\in(0,2)$和$d=4$，表3-2给出C_0的近似值.

表 3-2　C_0的近似值

τ	a_0	b_0	c_0	C_0
0.1	2.02	2.402	538.3	3.522×10^{17}
0.2	2.04	2.441	192.4	6.178×10^{8}
0.3	2.062	2.484	94.57	758 433.4
0.4	2.085	2.533	56.38	26 862.8
0.5	2.109	2.587	37.84	3 646.1
0.6	2.134	2.648	27.55	968.27
0.7	2.161	2.717	21.3	377.53
0.8	2.189	2.797	17.23	187.3
0.9	2.218	2.89	14.45	109.27
1	2.25	3	12.49	71.55
1.1	2.283	3.132	11.07	51.1
1.2	2.319	3.295	10	39.078
1.3	2.357	3.5	9.282	31.65
1.4	2.398	3.768	8.77	26.98
1.5	2.441	4.137	8.46	24.19
1.6	2.488	4.679	8.4	22.93
1.7	2.538	2.564	8.66	23.35
1.8	2.594	7.295	9.54	26.71
1.9	2.653	12.38	12.39	39.995

如果取$a=b=c=2$和$d=4$，则得定理3.2.4中的C_0的近似值见表3-3.

表 3-3　C_0的近似值（$a=b=c=2$）

τ	a	b	c	C_0
0.1	2	2	2	1.42×10^{24}
0.2	2	2	2	1.23×10^{12}
0.3	2	2	2	1.2×10^{8}
0.4	2	2	2	1.2×10^{6}
0.5	2	2	2	76 995.88
0.6	2	2	2	12 527.93
0.7	2	2	2	3 474.54
0.8	2	2	2	1 347.6
0.9	2	2	2	655.11
1	2	2	2	374.02
1.1	2	2	2	240.78
1.2	2	2	2	170.29
1.3	2	2	2	130.14
1.4	2	2	2	106.43
1.5	2	2	2	92.82
1.6	2	2	2	86.65
1.7	2	2	2	87.97
1.8	2	2	2	101.63
1.9	2	2	2	156.51

第4章　区域上的HM无散度多小波

给定不可压缩湍流数据，小波分解的第一步要求给出速度场在某尺度空间中的初始逼近，而且保持不可压缩条件. 对$[0, 1]^2$上的周期边界条件，谱方法经常被用来插值不可压缩湍流速度场. 设$\hat{u}_k$表示$\vec{u}$在N^2个格点上的离散Fourier系数,即

$$\hat{u}_k=\frac{1}{N^2}\sum_{n\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\}^2}\vec{u}\left(\frac{n}{N}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{k\cdot n}{N}}. \tag{4-1}$$

则$\vec{u}(x)=\sum_{k\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\}^2}\hat{u}_k\mathrm{e}^{2\pi ik\cdot x}$. 此时,不可压缩条件$\operatorname{div}\vec{u}=0$可写为$k\cdot\hat{u}_k=0,\ \forall k\in\{0,\ 1,\cdots,\ N-1\}^2$. 在参考文献[99]中，Deriaz和Perrier利用了$L^2(\mathbf{R}^2)^2$中的样条小波空间. 因为速度场$\vec{u}$在两个方向上都是1-周期的，所以用$L^2([0,\ 1]^2)^2$中的尺度空间$\vec{V}_J$更为合理，接下来的小波分解也应该在$L^2([0,\ 1]^2)^2$中的无散度小波基下进行. 因此，面临下面两个问题:

（1）选择$[0, 1]^2$上适当的无散度小波基，使得初始逼近保持不可压缩条件;

（2）初始逼近和进一步的小波分解应该具有快速算法.

4.1　区域上的HM多小波

虽然已有很多[0, 1]上的双正交小波，然而边界附近的小波基元素并不是实直线上小波的简单限制，而是一些函数的线性组合. 鉴于此，Hardin和Marasovich于1999年利用分形插值函数构造了实直线上的双正交多小波. 这类小波的特点是：它们在[0, 1]上的限制就是$L^2([0, 1])$的双正交多小波，而不需要专门构造边界小波. 具体地说，对$j\geqslant 0$

$$\phi^i_{s,j,k}(x)=\begin{cases}2^{\frac{1+j}{2}}\phi^i_s(2^jx-k)\ \chi_{[0,\ 1]}, & i=1,\ k=0,\ 2^j,\\ 2^{\frac{j}{2}}\phi^i_s(2^jx-k), & i=1,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^j-1;\ i=2,\ k=0,\ 1,\cdots,\ 2^j-1.\end{cases}$$

$$\psi^i_{s,j,k}(x)=\begin{cases}2^{\frac{1+j}{2}}\psi^i_s(2^jx-k)\ \chi_{[0,\ 1]}, & i=1,\ k=0,\ 2^j,\\ 2^{\frac{j}{2}}\psi^i_s(2^jx-k), & i=1,\ 2,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^j-1.\end{cases}$$

类似地，其对偶为$\tilde{\phi}^i_{s,j,k}(x)=:\phi^i_{\tilde{s},j,k}(x)$和$\tilde{\psi}^i_{s,j,k}(x)=:\psi^i_{\tilde{s},j,k}(x)$. 这里，$s\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{7}\right)$及$\tilde{s}=\frac{1+2s}{5s-2}$是参数. 从这些概念出发，2000年，Lakey和Pereyra利用Strela的双尺度变换对Hardin

和Marasovich的双正交小波进行光滑化和粗糙化技巧，得到$L^2(\mathbf{R})$上的另一对双正交多尺度函数$\phi_{\tilde{s}}^{i,+}$，$\phi_s^{i,-}$及多小波$\psi_{\tilde{s}}^{i,+}$，$\psi_{\tilde{s}}^{i,-}$. 它们的简单限制也构成$L^2([0,1])$上的双正交多尺度函数和多小波：

$$\phi_{\tilde{s},j,k}^{i,+}(x)=\begin{cases}2^{\frac{1+j}{2}}\phi_{\tilde{s}}^{i,+}(2^jx-k)\,\chi_{[0,1]}, & i=2,\ k=0,\ 2^j,\\ 2^{\frac{j}{2}}\phi_{\tilde{s}}^{i,+}(2^jx-k), & i=1,\ 2,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^j-1.\end{cases}$$

$$\psi_{\tilde{s},j,k}^{i,+}(x)=\begin{cases}2^{\frac{1+j}{2}}\psi_{\tilde{s}}^{i,+}(2^jx-k)\,\chi_{[0,1]}, & i=1,\ k=0,\ 2^j,\\ 2^{\frac{j}{2}}\psi_{\tilde{s}}^{i,+}(2^jx-k), & i=1,\ 2,\ k=1,\ 2,\cdots,\ 2^j-1.\end{cases}$$

类似地，它们的对偶为$\phi_{s,j,k}^{i,-}(x)$和$\psi_{s,j,k}^{i,-}(x)$，且所有这些新的函数在[0, 1]上具有零边值. 定义

$$\tilde{P}_j^+f=:\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^{2^j-1}\left\langle f,\ \phi_{s,j,k}^{i,-}\right\rangle\phi_{\tilde{s},j,k}^{i,+}+\sum_{k=0,2^j}\left\langle f,\ \phi_{s,j,k}^{2,-}\right\rangle\phi_{\tilde{s},j,k}^{2,+},$$

$$\tilde{P}_jf=:\sum_{i=1,2}\sum_{k=1}^{2^j-1}\left\langle f,\ \phi_{s,j,k}^{i}\right\rangle\phi_{\tilde{s},j,k}^{i}+\sum_{k=0,2^j}\left\langle f,\ \phi_{s,j,k}^{1}\right\rangle\phi_{\tilde{s},j,k}^{1}+\left\langle f,\phi_{s,j,0}^{2}\right\rangle\phi_{\tilde{s},j,0}^{2}.$$

那么下列结果成立.

定理4.1.1　设$f\in H_0^1([0,1])$,则$D\tilde{P}_j^+f=\tilde{P}_jDf$.进一步，$L^2(\mathbf{R})$上的多尺度函数和多小波满足下列微分关系：

$$D\Phi_{\tilde{s}}^{+}=T_{M^*}\Phi_{\tilde{s}},\ D\Phi_s=-T_M\Phi_s;\ D\Psi_{\tilde{s}}^{+}=-\Psi_{\tilde{s}},\ D\Psi_s=\Psi_s^{-}.$$

这里，$T_M=-(\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{M}_1S)$，$T_{M^*}=-(\boldsymbol{M}_0^*+\boldsymbol{M}_1^*S^{-1})$，$Sf(x)=f(x-1)$ 且

$$\boldsymbol{M}_0=:\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}_1=:\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

最后，定义

$$H(\mathrm{div};\ [0,1]^2)=:\left\{\vec{f}\in L^2([0,1]^2)^2\,\middle|\,\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\in L^2([0,1]^2)\ \mathrm{div}\,\vec{f}=0\text{且}\vec{f}\text{具有切向边值}\right\}.$$

一个向量值函数$\vec{f}=(f_1,\ f_2)$具有切向边值是指$f_1(0,\ y)=f_1(1,\ y)=f_2(x,\ 0)=f_2(x,\ 1)=0$对所有$x,y\in[0,1]$成立.

4.2　无散度尺度函数与小波

在这部分，首先证明$H(\mathrm{div};\ [0,1]^2)$中函数的双正交投影保持无散度性质；然后利用流函数的概念给出无散度尺度函数，并且给出计算其对应系数的方法.

令$m=(m_1,\ m_2)\in\{1,\ 2\}^2$. 对$I\subseteq\{1,\ 2\}$，定义

$$\varphi^{I}_{m;j,k}(x,\ y)\ =:\prod_{i=1}^{2}\phi^{I}_{m_i,j,k_i},$$

其中，$\phi^{I}_{m_i,j,k_i}=\begin{cases}\phi^{m_i,+}_{\tilde{s},j,k_i}, & i\in I,\\ \phi^{m_i}_{\tilde{s},j,k_i}, & i\notin I.\end{cases}$

那么$(L^2([0,1]^2))^2$中的多尺度函数为$\vec{\Phi}^{1}_{m;j,k}(x,y)=\varphi^{\{1\}}_{m;j,k}(x,y)\delta_1$和$\vec{\Phi}^{2}_{m;j,k}(x,y)=\varphi^{\{2\}}_{m;j,k}(x,y)\delta_2$. 用负号代替正号, s代替$\tilde{s}$得到其对偶. 令

$$\vec{V}_j=\operatorname{span}\left\{\vec{\Phi}^{1}_{m;j,k}(x,\ y),\vec{\Phi}^{2}_{m;j,k}(x,\ y)\middle|m\in\{1,\ 2\}^2\right\}.$$

则下列结果成立.

命题4.2.1 设$\vec{u}\in H(\mathrm{div},\ [0,1]^2)$且$\vec{u}_j$是它在$\vec{V}_j$上的双正交投影, 则$\mathrm{div}\,\vec{u}_j=0$.

证明 令$\mathbf{Z}^1_j=:\{1,\cdots,2^j-1\}$, $\mathbf{Z}^2_j=:\mathbf{Z}^1_j\cup\{0,2^j\}$和$\mathbf{Z}^3_j=:\mathbf{Z}^1_j\cup\{0\}$. 由双正交投影的定义知

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{u}_j=&\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^1_j,k_2\in\mathbf{Z}^2_j}\left\langle u_1,\phi^{1,-}_{s,j,k_1}\phi^{1}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^2_j,k_2\in\mathbf{Z}^2_j}\left\langle u_1,\phi^{2,}_{s,j,k_1}\phi^{1}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^1_j,k_2\in\mathbf{Z}^3_j}\left\langle u_1,\phi^{1,-}_{s,j,k_1}\phi^{2}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{2}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^2_j,k_2\in\mathbf{Z}^3_j}\left\langle u_1,\phi^{2,-}_{s,j,k_1}\phi^{2}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{2}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^2_j,k_2\in\mathbf{Z}^1_j}\left\langle u_2,\phi^{1}_{s,j,k_1}\phi^{1,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^2_j,k_2\in\mathbf{Z}^2_j}\left\langle u_2,\phi^{1}_{s,j,k_1}\phi^{2,\cdot}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^3_j,k_2\in\mathbf{Z}^1_j}\left\langle u_2,\phi^{2}_{s,j,k_1}\phi^{1,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}^3_j,k_2\in\mathbf{Z}^2_j}\left\langle u_2,\phi^{2}_{s,j,k_1}\phi^{2,}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{2}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_2}. \qquad (4\text{-}2)
\end{aligned}$$

因为$\vec{u}$具有切向边值, 所以 $u_1(x,y)\in H^1_0([0,1])$, $\forall y\in[0,1]$; 类似地, $u_2(x,y)\in H^1_0([0,1])$, $\forall\ x\in[0,1]$. 注意到定理4.1.1中的交换关系可以重新写成

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^1_j}\left\langle f,\phi^{1,\cdot}_{s,j,k}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k}+\sum_{k\in\mathbf{Z}^2_j}\left\langle f,\phi^{2,-}_{s,j,k}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k}$$

$$=\sum_{k\in \mathbf{Z}_j^2}\left\langle f',\phi^1_{s,j,k}\right\rangle \phi^1_{\tilde{s},j,k}+\sum_{k\in \mathbf{Z}_j^3}\left\langle f',\phi^2_{s,j,k}\right\rangle \phi^2_{\tilde{s},j,k}. \tag{4-3}$$

将式（4-3）用于式（4-2），有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{u}_j=&\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^2,k_2\in \mathbf{Z}_j^2}\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x},\phi^1_{s,j,k_1}\phi^1_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^1_{\tilde{s},j,k_1}\phi^1_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^3,k_2\in \mathbf{Z}_j^2}\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x},\phi^2_{s,j,k_1}\phi^1_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^2_{\tilde{s},j,k_1}\phi^1_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^2,k_2\in \mathbf{Z}_j^3}\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x},\phi^1_{s,j,k_1}\phi^2_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^1_{\tilde{s},j,k_1}\phi^2_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^3,k_2\in \mathbf{Z}_j^3}\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x},\phi^2_{s,j,k_1}\phi^2_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^2_{\tilde{s},j,k_1}\phi^2_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^2,k_2\in \mathbf{Z}_j^2}\left\langle \frac{\partial u_2}{\partial y},\phi^1_{s,j,k_1}\phi^1_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^1_{\tilde{s},j,k_1}\phi^1_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^3,k_2\in \mathbf{Z}_j^2}\left\langle \frac{\partial u_2}{\partial y},\phi^2_{s,j,k_1}\phi^1_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^2_{\tilde{s},j,k_1}\phi^1_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^2,k_2\in \mathbf{Z}_j^3}\left\langle \frac{\partial u_2}{\partial y},\phi^1_{s,j,k_1}\phi^2_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^1_{\tilde{s},j,k_1}\phi^2_{\tilde{s},j,k_2}\\&+\sum_{k_1\in \mathbf{Z}_j^3,k_2\in \mathbf{Z}_j^3}\left\langle \frac{\partial u_2}{\partial y},\phi^2_{s,j,k_1}\phi^2_{s,j,k_2}\right\rangle \phi^2_{\tilde{s},j,k_1}\phi^2_{\tilde{s},j,k_2}.\end{aligned}$$

合并具有相同指标集的项并利用 $\operatorname{div}\vec{u}=0$ 便有 $\operatorname{div}\vec{u}_j=0$.

为介绍下一个定理, 对 $m\in\{1,2\}^2$ 和 $e=(e_1,e_2)\in E_2^*$，定义 $\psi^I_{e,m;j,k}=:\prod_{i=1}^{2}\vartheta^I_{e_i,m_i;j,k_i}$. 这里,

$$\vartheta^I_{e_i,m_i;j,k_i}=\begin{cases}\psi^I_{m_i,j,k_i}, & e_i=1,\\ \phi^I_{m_i,j,k_i}, & e_i=0,\end{cases}\quad 且\ \psi^I_{m_i,j,k_i}=\begin{cases}\psi^{m_i,+}_{\tilde{s},j,k_i}, & i\in I,\\ \psi^{mi}_{\tilde{s},j,k_i}, & i\notin I.\end{cases}$$

则（$L^2([0,1]^2)^2$）中的多小波为 $\vec{\Psi}^1_{e,m;j,k}(x,y)=\psi^{\{1\}}_{e,m;j,k}(x,y)\delta_1$ 和 $\vec{\Psi}^2_{e,m;j,k}(x,y)=\psi^{\{2\}}_{e,m;j,k}(x,y)\delta_2$. 对$e\in E_2^*$，$i\in\{1,2\}\setminus\{i_e\}$, $m\in\{1,2\}^2$, 定义

$$\vec{\Psi}^{\operatorname{div}}_{e,m,i;j,k}(x,y)=:\psi^{\{i\}}_{e,m;j,k}\delta_i+2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi^{\{i,i_e\}}_{e,m;j,k}\delta_{i_e},\ \vec{\Psi}^{n}_{e,m;j,k}(x,y)=:\psi^{\{i_e\}}_{e,m;j,k}\delta_{i_e}.$$

由定理4.1.1, 容易验证 $\operatorname{div}\vec{\Psi}^{\operatorname{div}}_{e,m,i;j,k}(x,y)=0$. 定义

$$\vec{W}_j=:\operatorname{span}\left\{\vec{\Psi}^1_{e,m;j,k},\vec{\Psi}^2_{e,m;j,k}\,\middle|\,e\in E_2^*,\ m\in\{1,2\}^2\right\},$$

$$\vec{\Phi}^{\text{div}}_{m;j,k}(x,\ y)=:\phi^{m_1,+}_{\tilde{s},j,k_1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{m_2,+}_{\tilde{s},j,k_2}(y)\ \delta_1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{m_1,+}_{\tilde{s},j,k_1}(x)\ \phi^{m_2,+}_{\tilde{s},j,k_2}(y)\ \delta_2. \tag{4-4}$$

则有如下结果.

定理4.2.1 （1）设 $\vec{u}_j$ 是 $\vec{u}(x,\ y)\in H(\text{div},\ [0,1]^2)$ 在 $\vec{V}_j$ 上的双正交投影，则 $\vec{u}_j$ 是 $\left\{\vec{\Phi}^{\text{div}}_{m;j,k}(x,y)\middle| m\in\{1,2\}^2\right\}$ 中元素的线性组合;

（2）函数系 $\left\{\vec{\Psi}^{\text{div}}_{e,m,i;j,k}(x,\ y),\ \vec{\Psi}^{n}_{e,m;j,k}(x,\ y)\middle| i\neq i_e\right\}$ 在 $\vec{W}_j$ 中完备.

证明 首先证明（1）：因为 $\text{div}\,\vec{u}=0$，所以存在一个流函数 $\omega\ (x,y)$ 使得

$$u_1\ (x,y)\ =\frac{\partial\omega}{\partial y},\ u_2(x,\ y)\ =-\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

由双正交投影的定义

$$\begin{aligned}
u_j^1(x,\ y)\ =&\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^1,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^2}\left\langle\frac{\partial\omega}{\partial y},\phi^{1,}_{s,j,k_1}\phi^{1}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^1,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^3}\left\langle\frac{\partial\omega}{\partial y},\phi^{1,}_{s,j,k_1}\phi^{2}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{2}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^2,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^2}\left\langle\frac{\partial\omega}{\partial y},\phi^{2,}_{s,j,k_1}\phi^{1}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{1}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^2,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^3}\left\langle\frac{\partial\omega}{\partial y},\phi^{2,}_{s,j,k_1}\phi^{2}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{2}_{\tilde{s},j,k_2}.
\end{aligned}$$

进一步，利用式（4-3）得

$$\begin{aligned}
u_j^1(x,\ y)\ =&\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^1,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^1}\left\langle\omega,\ \phi^{1,}_{s,j,k_1}\phi^{1,}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^1,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^2}\left\langle\omega,\phi^{1,-}_{s,j,k_1}\phi^{2,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^2,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^1}\left\langle\omega,\phi^{2,-}_{s,j,k_1}\phi^{1,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&+\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^2,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^2}\left\langle\omega,\phi^{2,}_{s,j,k_1}\phi^{2,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_2}.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
u_j^2(x,\ y)\ =&-\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^1,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^1}\left\langle\omega,\phi^{1,}_{s,j,k_1}\phi^{1,}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_2}\\
&-\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^1,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^2}\left\langle\omega,\phi^{1,-}_{s,j,k_1}\phi^{2,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_2}
\end{aligned}$$

$$-\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^2,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^1}\left\langle\omega,\phi^{2,}_{s,j,k_1}\phi^{1,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{1,+}_{\tilde{s},j,k_2}$$

$$-\sum_{k_1\in\mathbf{Z}_j^2,\,k_2\in\mathbf{Z}_j^2}\left\langle\omega,\phi^{2,-}_{s,j,k_1}\phi^{2,-}_{s,j,k_2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_1}\phi^{2,+}_{\tilde{s},j,k_2}.$$

因此,

$$\vec{u}_j(x,y)=\sum_k\sum_m\left\langle\omega,\tilde{\varphi}^{\{1,2\}}_{m;j,k}\right\rangle\vec{\Phi}^{\mathrm{div}}_{m,j,k}(x,y).\tag{4-5}$$

下面证明（2）：设 $\vec{f}\in\vec{W}_j$ 满足 $\left\langle\vec{f},\vec{\Psi}^{\mathrm{div}}_{e,m,i;j,k}\right\rangle=0$, $i\neq i_e$ 且 $\left\langle\vec{f},\vec{\Psi}^{n}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$, 则只须证明 $\vec{f}=0$：因为 $\left\langle\vec{f},\vec{\Psi}^{n}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$ 蕴涵 $\left\langle f_{i_e},\psi^{\{i_e\}}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$, 而且

$$\left\langle\vec{f},\vec{\Psi}^{\mathrm{div}}_{e,m,i;j,k}\right\rangle=0\Leftrightarrow\left\langle f_i,\psi^{\{i\}}_{e,m;j,k}\right\rangle+2^{j}\left\langle f_{i_e},\frac{\partial}{\partial x_i}\psi^{\{i,i_e\}}_{e,m;j,k}\right\rangle=0,\ \forall i\neq i_e,$$

所以 $\left\langle f_i,\psi^{\{i\}}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$, $e\in E_2^*$, $m\in\{1,2\}^2$, $1\leqslant i\leqslant 2$. 故 $\left\langle\vec{f},\vec{\Psi}^{1}_{e,m;j,k}\right\rangle=\left\langle\vec{f},\vec{\Psi}^{2}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$. 最后，由 $\vec{W}_j$ 的定义得到 $\vec{f}=0$.

注记4.2.1 如果 $\vec{u}(x,y)\in H(\mathrm{div},[0,1]^2)$, 则利用命题4.2.1和多尺度函数的定义得 $\vec{u}_j\in H(\mathrm{div},[0,1]^2)$. 因为 $\mathrm{div}\,\vec{\Phi}^{\mathrm{div}}_{m;j,k}(x,y)=0$，所以式(4-5)意味着式(4-4)中定义的 $\vec{\Phi}^{\mathrm{div}}_{m;j,k}(x,y)$, $m\in\{1,2\}^2$ 是 $[0,1]^2$ 上的无散度尺度函数. 同时也表明了如何计算其对应的系数.

4.3 快速算法

本小节讨论具有切向边值的无散度向量场的HM无散度小波系数的快速算法. 设 $\vec{u}(x,y)=(u_1(x,y),u_2(x,y))^{\mathrm{T}}\in L^2([0,1]^2)^2$, 则

$$\begin{aligned}\vec{u}(x,y)=&\sum_m\sum_k\left[c^1_{m,k}\vec{\Phi}^1_{m;0,k}+c^2_{m,k}\vec{\Phi}^2_{m;0,k}\right]\\&+\sum_{e,m}\sum_{j\geqslant 0}\sum_k\left[d^1_{e,m,j,k}\vec{\Psi}^1_{e,m;j,k}+d^2_{e,m,j,k}\vec{\Psi}^2_{e,m;j,k}\right].\end{aligned}\tag{4-6}$$

下面的结果给出无散度小波系数的快速算法.

定理4.3.1 设 $\vec{u}(x,y)\in H(\mathrm{div},[0,2]^2)$，则

$$\begin{aligned}\vec{u}(x,y)=&\sum_m\sum_k\left[c^1_{m,k}\vec{\Phi}^1_{m;0,k}+c^2_{m,k}\vec{\Phi}^2_{m;0,k}\right]\\&+\sum_{e,m}\sum_{j\geqslant 0}\sum_k\sum_{i\neq i_e}d^{\mathrm{div}}_{e,m,i,j,k}\vec{\Psi}^{\mathrm{div}}_{e,m,i;j,k}.\end{aligned}\tag{4-7}$$

而且无散度小波系数满足

$$d^{\mathrm{div}}_{e,m,i,j,k}=\begin{cases}d^1_{e,m,j,k}, & i_e=2,\\ d^2_{e,m,j,k}, & i_e=1.\end{cases}$$

证明 由定理4.2.1，有

$$\vec{u}(x, y)=\sum_{m}\sum_{k}\left[c_{m,k}^{1}\vec{\Phi}_{m;0,k}^{1}+c_{m,k}^{2}\vec{\Phi}_{m;0,k}^{2}\right]$$

$$+\sum_{e,m}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k}\left[\sum_{i\neq i_e}d_{e,m,i,j,k}^{\text{div}}\vec{\Psi}_{e,m,i;j,k}^{\text{div}}d_{e,m,j,k}^{n}\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{n}\right].$$

记$\vec{u}_0(x, y)=\sum_{m}\sum_{k}\left[c_{m,k}^{1}\vec{\Phi}_{m;0,k}^{1}+c_{m,k}^{2}\vec{\Phi}_{m;0,k}^{2}\right]$，则

$$\operatorname{div}\vec{u}(x, y)=\operatorname{div}\vec{u}_0(x, y)+\sum_{e,m}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k}d_{e,m,j,k}^{n}\operatorname{div}\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{n}.$$

进一步，由命题4.2.1知$\operatorname{div}\vec{u}_0(x, y)=0$．因此，$\sum_{e,m}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k}d_{e,m,j,k}^{n}\operatorname{div}\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{n}=0$．注意到$\operatorname{div}\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{n}=\frac{\partial}{\partial x_{i_e}}\psi_{e,m;j,k}^{\{i_e\}}=-2^{j}\psi_{e,m;j,k}^{\varnothing}$和$\left\{\psi_{e,m;j,k}^{\varnothing}\right\}$的线性无关性，则有$d_{e,m,j,k}^{n}=0$，从而式（4-7）得证.

现证第二部分：由式（4-6）和（4-7），有

$$\sum_{e,m}\sum_{i\neq i_e}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k}d_{e,m,i,j,k}^{\text{div}}\vec{\Psi}_{e,m,i;j,k}^{\text{div}}=\sum_{e,m}\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k}\left[d_{e,m,j,k}^{1}\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{1}+d_{e,m,j,k}^{2}\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{2}\right].$$

显然，上式可以重新表达为

$$\sum_{m,j,k}\left[d_{(1,1),m,2,j,k}^{\text{div}}\vec{\Psi}_{(1,1),m,2;j,k}^{\text{div}}+d_{(1,0),m,2,j,k}^{\text{div}}\vec{\Psi}_{(1,0),m,2;j,k}^{\text{div}}+d_{(0,1),m,1,j,k}^{\text{div}}\vec{\Psi}_{(0,1),m,1;j,k}^{\text{div}}\right]$$

$$=\sum_{m,j,k}\left[d_{(1,1),m,j,k}^{1}\vec{\Psi}_{(1,1),m;j,k}^{1}+d_{(1,1),m,j,k}^{2}\vec{\Psi}_{(1,1),m;j,k}^{2}\right]$$

$$+\sum_{m,j,k}\left[d_{(1,0),m,j,k}^{1}\vec{\Psi}_{(1,0),m;j,k}^{1}+d_{(1,0),m,j,k}^{2}\vec{\Psi}_{(1,0),m;j,k}^{2}\right]$$

$$+\sum_{m,j,k}\left[d_{(0,1),m,j,k}^{1}\vec{\Psi}_{(0,1),m;j,k}^{1}+d_{(0,1),m;j,k}^{2}\vec{\Psi}_{(0,1),m;j,k}^{2}\right].$$

对$e=(1, 1)$和$i_e=1$，$\vec{\Psi}_{(1,1),m,2;j,k}^{\text{div}}=\vec{\Psi}_{(1,1),m;j,k}^{2}-\vec{\Psi}_{(1,1),m;j,k}^{1}$且$\vec{\Psi}_{(1,0),m,2;j,k}^{\text{div}}=\vec{\Psi}_{(1,0),m;j,k}^{2}+2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_{(1,0),m;j,k}^{\{1,2\}}\delta_1$，$\vec{\Psi}_{(0,1),m,1;j,k}^{\text{div}}=\vec{\Psi}_{(0,1),m;j,k}^{1}+2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_{(0,1),m;j,k}^{\{1,2\}}\delta_2$. 由定理4.1.1，$2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_{(1,0),m;j,k}^{\{1,2\}}\delta_1$是$\vec{\Psi}_{(1,0),m;j,k}^{1}$中元素的线性组合，而$2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_{(0,1),m;j,k}^{\{1,2\}}\delta_2$为$\vec{\Psi}_{(0,1),m;j,k}^{2}$中元素的线性组合. 最后，利用$\left\{\vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{1}, \vec{\Psi}_{e,m;j,k}^{2}\right\}$的线性无关性得到期望的结果.

小波分解的第一步是给出向量场在尺度空间$\vec{V}_J$中的初始逼近. 下面将证明：由谱方法得到的向量场的初始逼近可以通过简单而精确的计算得到. 在式（4-1）中令$N=2^J$，并取参数$s=0$. 设

$$\vec{u}_J(x, y)=\sum_{m}\sum_{k}\left\langle\vec{u}(x, y), \tilde{\vec{\Phi}}_{m;J,k}^{1}(x, y)\right\rangle\vec{\Phi}_{m;J,k}^{1}+\sum_{m}\sum_{k}\left\langle\vec{u}(x, y), \tilde{\vec{\Phi}}_{m;J,k}^{2}(x, y)\right\rangle\vec{\Phi}_{m;J,k}^{2}.$$

现在的任务是计算

$$c^1_{m,J,k}=:\left\langle \vec{u}(x,y),\ \vec{\tilde{\Phi}}^1_{m;J,k}(x,y)\right\rangle \tag{4-8}$$

和

$$c^2_{m,J,k}=:\left\langle \vec{u}(x,y),\ \vec{\tilde{\Phi}}^2_{m;J,k}(x,y)\right\rangle. \tag{4-9}$$

定理4.3.2 上述系数 $c^1_{m,J,k}$和$c^2_{m,J,k}$ 可以通过 $\sin(2\pi n_1 2^{J'})$, $\cos(2\pi n_2 2^{J'})$ 以及它们乘积的线性组合的精确计算得到，其中 $J'=-J-2,\ -J-1,\ -J,\ n_1, n_2\in\{0,\ 1,\cdots,\ 2^J-1\}$.

证明 由 $\vec{u}(x,\ y)=\sum\limits_{n\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ 2^J-1\}^2}\hat{u}_n e^{2\pi i n\cdot(x,\ y)}$ 和 $\vec{\tilde{\Phi}}^1_{m;J,k}$，$\vec{\tilde{\Phi}}^2_{m;J,k}$ 的定义，有

$$c^1_{m,J,k}=\left\langle u_1,\ \phi^{m_1,}_{0,J,k_1}\phi^{m_2}_{0,J,k_2}\right\rangle=\sum_{n\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ 2^J-1\}^2}\hat{u}^1_n\int_0^1\phi^{m_1,}_{0,J,k_1}(x)e^{2\pi i n_1 x}dx\int_0^1\phi^{m_2}_{0,J,k_2}(y)e^{2\pi i n_2 y}dy,$$

$$c^2_{m,J,k}=\left\langle u_2,\ \phi^{m_1}_{0,J,k_1}\phi^{m_2,}_{0,J,k_2}\right\rangle=\sum_{n\in\{0,\ 1,\cdots,\ 2^J-1\}^2}\hat{u}^2_n\int_0^1\phi^{m_1}_{0,J,k_1}(x)e^{2\pi i n_1 x}dx\int_0^1\phi^{m_2,-}_{0,J,k_2}(y)e^{2\pi i n_2 y}dy.$$

因为$\hat{u}^1_n$和$\hat{u}^2_n$由式（4-1）给定，所以为了计算式（4-8）和式（4-9）中的所有系数，只须计算$\int_0^1\phi^{1,-}_{0,J,k_1}(x)e^{2\pi i n_1 x}dx$, $\int_0^1\phi^{1}_{0,J,k_2}(y)e^{2\pi i n_2 y}dy$, $\int_0^1\phi^{2,-}_{0,J,k_1}(x)e^{2\pi i n_1 x}dx$和$\int_0^1\phi^{2}_{0,J,k_2}(y)e^{2\pi i n_2 y}dy$即可. 从参考文献[19]可知，当$s=0$时，

$$\phi^{1,}_0(x)=a\chi_{[1,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1]}+b\chi_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})},$$

$$\phi^{2,}_0(x)=a\chi_{[-1,\frac{1}{2}]}+b\chi_{[-\frac{1}{2},0]}-b\chi_{[0,\frac{1}{2}]}-a\chi_{[\frac{1}{2},1]}.$$

且下列细分方程成立:

$$12\begin{pmatrix}\phi^{1,}_0(x)\\ \phi^{2,-}_0(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{1,}_0(2x+2)\\ \phi^{2,}_0(2x+2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -8\\ 6 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{1,-}_0(2x+1)\\ \phi^{2,-}_0(2x+1)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}14 & 0\\ 0 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{1,-}_0(2x)\\ \phi^{2,-}_0(2x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 8\\ -6 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{1,-}_0(2x-1)\\ \phi^{2,}_0(2x-1)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{1,-}_0(2x-2)\\ \phi^{2,}_0(2x-2)\end{pmatrix}.$$

在上述细分方程中取 $-1\leqslant x\leqslant-\frac{3}{4}$ 可得 $b=-7a$． 利用定理4.1.1中的微分关系 $\frac{d}{dx}\phi^1_0(x)=2\sqrt{2}\phi^{2,}_0(x)$ 和 $\frac{d}{dx}\phi^2_0(x)=\phi^{1,}_0(x)-\phi^{2,-}_0(x)-\phi^{1,-}_0(x-1)-\phi^{2,-}_0(x-1)$，有 $\phi^2_0(x)=-16ax\chi_{[0,\frac{1}{2}]}+16a(x-1)\chi_{[\frac{1}{2},1]}$ 以及 $\phi^1_0(x)=2\sqrt{2}a(x+1)\chi_{[-1,-\frac{1}{2}]}+2\sqrt{2}(bx-3a)\chi_{[-\frac{1}{2},0]}$

$-2\sqrt{2}(bx+3a)\chi_{\left[0,\ \frac{1}{2}\right]}-2\sqrt{2}a(x-1)\chi_{\left[\frac{1}{2},\ 1\right]}$.

进一步从参考文献[19]中知$(\hat{\phi}_0^1(0),\hat{\phi}_0^2(0))=(1,\ \sqrt{2})$，因此$a=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 上述讨论表明$\phi_0^{1\prime}$，$\phi^{2\prime}$，$\phi_0^1$和$\phi_0^2$均为分段线性函数，故式（4-8）中所有系数是$\sin(2\pi n_1 2^{J'})$，$\cos(2\pi n_2 2^{J'})$以及它们乘积的线性组合，其中$J'=-J-2,-J-1,-J$，$n_1,n_2\in\left\{0,\ 1,\cdots,\ 2^J-1\right\}$.

注记4.3.1 注意到$\vec{u}_J(x,y)=\sum\limits_m\sum\limits_k c^1_{m,J,k}\vec{\Phi}^1_{m;J,k}+\sum\limits_m\sum\limits_k c^2_{m,J,k}\vec{\Phi}^2_{m;J,k}$

$$=\sum_{m,k}\left[c^1_{m,J-1,k}\vec{\Phi}^1_{m;J-1,k}+c^2_{m,J-1,k}\vec{\Phi}^2_{m;J-1,k}\right]+\sum_{e,m,k}\left[d^1_{e,m,J-1,k}\vec{\Psi}^1_{e,m;J-1,k}+d^2_{e,m,J-1,k}\vec{\Psi}^2_{e,m;J-1,k}\right].$$

那么，只要知道$c^1_{m,J,k}$和$c^2_{m,J,k}$，$d^1_{e,m,J-1,k}$和$d^2_{e,m,J-1,k}$便可以通过快速双正交小波变换得到. 进一步，由定理4.3.1可得无散度小波系数.

第 5 章 插值无旋度小波及应用

Bittner 和 Urban 在参考文献[20]中利用 Hermite 样条构造了插值无散度多小波并用它刻画了一类向量 Besov 空间. 由于描述特定电磁场现象的 Maxwell 方程中涉及旋度算子, 而且无散度向量场和无旋度向量场构成了 $L^2(\mathbf{R}^n)^n$ 的一个 Helmholtz 分解. 这一分解已经被成功地应用于计算二维和三维 Navier-Stokes 方程的非线性项中, 因此, 插值无旋度向量小波会有某些潜在的应用.

5.1 插值无旋度向量小波

在本小节, 将构造插值无旋度向量小波. 对三维向量场 $\vec{f}=(f_1, f_2, f_3)$, 其旋度是指

$$\operatorname{curl}\vec{f}=:(\partial_2 f_3-\partial_3 f_2, \partial_3 f_1-\partial_1 f_3, \partial_1 f_2-\partial_2 f_1),$$

这里的导数是指分布意义下的导数. 对 $m\in\{1, 2\}^3$, $1\leqslant i\leqslant 3$, 定义 $L^2(\mathbf{R}^3)^3$ 中的向量尺度函数和尺度空间分别为 $\vec{\varphi}_{m,i}=:\varnothing_m^{I\backslash\{i\}}\delta_i$ 和 $\vec{\varphi}_{m,i}$

$$\vec{V}_j=\operatorname{clos}_{L^2}\operatorname{span}\{\vec{\varphi}_{m,i;j,k}, m\in\{1,2\}^3, 1\leqslant i\leqslant 3, k\in\mathbf{Z}^3\}.$$

我们知道参考文献[20]中的 Hermite 内插公式有一个重要性质: 无散度向量场的插值仍然是无散度的. 类似地, 基于 1.4 节中的 Hermite 样条, 我们定义能够保持无旋度性质的内插公式 $\vec{\Lambda}_j^c$. 记

$$C(\operatorname{curl};\mathbf{R}^3)=:\{\vec{v}\in(C(\mathbf{R}^3))^3 \mid \operatorname{curl}\vec{v}\in(C(\mathbf{R}^3))^3\},$$

$$\vec{\Lambda}_j=:\Lambda_j^{\{1\}}\delta_1+\Lambda_j^{\{2\}}\delta_2+\Lambda_j^{\{3\}}\delta_3.$$

那么下面的命题成立.

命题 5.1.1 设 $\vec{f}\in C(\operatorname{curl};\mathbf{R}^3)$, 则 $\vec{\Lambda}_j^c=:\Lambda_j^{\{2,3\}}\delta_1+\Lambda_j^{\{1,3\}}\delta_2+\Lambda_j^{\{1,2\}}\delta_3$ 满足

$$\operatorname{curl}(\vec{\Lambda}_j^c\vec{f})=\vec{\Lambda}_j(\operatorname{curl}\vec{f}).$$

证明 注意到 $\operatorname{curl}\vec{f}=:\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\delta_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\delta_2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\delta_3$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_j^{I'}f=\Lambda_j^{I'\backslash\{i\}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)$, $\forall i\in I'$. 有

$$\vec{\Lambda}_j(\operatorname{curl}\vec{f})=\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda_j^{\{1,2\}}f_3-\frac{\partial}{\partial x_3}\Lambda_j^{\{1,3\}}f_2\right)\delta_1$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\Lambda_j^{\{2,3\}}f_1-\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_j^{\{1,2\}}f_3\right)\delta_2+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_j^{\{1,3\}}f_2-\frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda_j^{\{2,3\}}f_1\right)\delta_3.$$

进一步，由 $\mathrm{curl}(\vec{\Lambda}_j^c\vec{f})$ 的定义便得所证结论.

对上面定义的向量尺度函数和尺度空间，相应的向量小波和小波空间分别为 $\vec{\psi}_{e,m,i}(x_1,x_2,x_3)=:\psi_{e,m}^{I\backslash\{i\}}\delta_i$ 和 $\vec{W}_j=\mathrm{clos}_{L^2}\mathrm{span}\left\{\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}\,\middle|\,e\in E_3^*,m\in\{1,\ 2\}^3,1\leqslant i\leqslant 3,k\in\mathbf{Z}^3\right\}$. 对 $e\in E_3^*$ 和 $m\in\{1,\ 2\}^3$，定义

$$\vec{\psi}_{e,m}^{\triangledown}=:\mathrm{grad}\,\psi_{e,m}^I=\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_{e,m}^I\delta_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_{e,m}^I\delta_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_{e,m}^I\delta_3. \tag{5-1}$$

显然，$\mathrm{curl}(\vec{\psi}_{e,m}^{\triangledown})=\vec{0}$. 进一步，为了分解 $\vec{W}_j$，定义

$$\vec{\psi}_{e,m,i}^{\vartriangle}=:\psi_{e,m}^{I\backslash\{i\}}\delta_i,\ i\in I\backslash\{i_e\}. \tag{5-2}$$

则容易证明下面的引理.

引理 5.1.1 向量函数系 $\left\{\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}^{\vartriangle},\vec{\psi}_{e,m;j,k}^{\triangledown}\,\middle|\,e\in E_3^*,m\in\{1,\ 2\}^3,i\neq i_e,k\in\mathbf{Z}^3\right\}$ 在 $\vec{W}_j$ 中完备.

证明 不失一般性，我们证明 $j=0$ 的情形：设 $\vec{f}\in\vec{W}_0$ 且对任意的 $e\in E_3^*,m\in\{1,2\}^3,k\in\mathbf{Z}^3$，$1\leqslant i\leqslant 3$ 和 $i\neq i_e$，$\left(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m;\ 0,k}^{\triangledown}\right)=\left(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m,i;0,k}^{\vartriangle}\right)=0$. 不妨假定 $i_e=1$. 由 $\left(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m,i;0,k}^{\vartriangle}\right)=0$ 和式（5-2），有

$$\left(f_2,\psi_{e,m;0,k}^{I\backslash\{2\}}\right)=\left(f_3,\psi_{e,m;0,k}^{I\backslash\{3\}}\right)=0.$$

利用 $\psi^{I'}$ 的定义和微分关系式（1-7），$\left(f_2,\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_{e,m;0,k}^I\right)=\left(f_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_{e,m;0,k}^I\right)=0$. 进一步，由 $\left(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m;0,k}^{\triangledown}\right)=0$ 可得 $\left(f_1,\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_{e,m;0,k}^I\right)=0$. 因为 $i_e=1$，所以

$$\left(f_1,\psi_{e,m;0,k}^{I\backslash\{1\}}\right)=\frac{1}{2}\left(f_1,\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_{e,m;0,k}^I\right)=0.$$

最后，$\left(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m,i;0,k}\right)=0,\forall e\in E_3^*,m\in\{1,\ 2\}^3$，$1\leqslant i\leqslant 3,k\in\mathbf{Z}^3$. 由 $\vec{W}_0$ 的定义得 $\vec{f}=0$. 引理得证.

为给出双正交分解，我们记 $I=\{i,i_e,i'\}$ 并定义

$$\vec{\tilde{\psi}}_{e,m}^{\triangledown}=\frac{1}{2}\tilde{\psi}_{e,m}^{I\backslash\{i_e\}}\delta_{i_e}. \tag{5-3}$$

注意到

$$\mathrm{curl}\,\vec{\psi}_{e,m,i}^{\vartriangle}=\mathrm{curl}\psi_{e,m}^{I\backslash\{i\}}\delta_i=2\varepsilon_1\psi_{e,m}^{I\backslash\{i,i_e\}}\delta_{i'}+\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_{i'}}\psi_{e,m}^{I\backslash\{i\}}\delta_{i_e}, \tag{5-4}$$

其中，$|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=1$ 且 $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$. 进一步，定义

$$\vec{\tilde{\psi}}_{e,m,i}^{\vartriangle}=:\frac{\varepsilon_1}{2}\mathrm{curl}\,\tilde{\psi}_{e,m}^{I\backslash\{i,i_e\}}\delta_{i'}, \tag{5-5}$$

这里的求导在分布意义下进行. 下面给出这一部分的主要定理.

定理 5.1.1 向量函数系$\left\{\vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i;j,k},\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k}\middle| i\neq i_e,\ e\in E_3^*,\ m\in\{1,2\}^3,\ k\in\mathbf{Z}^3,\ j\in\mathbf{Z}\right\}$构成$L^2(\mathbf{R}^3)^3$的双正交小波基, 并且其对偶由式(5-3)和(5-5)给出.

证明 根据引理5.1.1, 只须证明:

(1) $\left\langle\vec{\psi}^{\Delta}_{e',m',i;j',k'},\vec{\tilde{\psi}}^{\nabla}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$;

(2) $\left\langle\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k},\ \vec{\tilde{\psi}}^{\Delta}_{e',m',i;j',k'}\right\rangle=0$;

(3) $\left\langle\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k},\ \vec{\tilde{\psi}}^{\nabla}_{e',m';j',k'}\right\rangle=\delta_{e,e'}\delta_{m,m'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$;

(4) $\left\langle\vec{\psi}^{\Delta}_{e_1,m_1,i_1;j_1,k_1},\vec{\tilde{\psi}}^{\Delta}_{e_2,m_2,i_2;j_2,k_2}\right\rangle=\delta_{e_1,e_2}\delta_{m_1,m_2}\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2}\delta_{k_1,k_2}$.

当$i\neq i_e$时, 利用式(5-2)和(5-3)直接可得(1); 当$i=i_e$时, 因为$i\neq i_{e'}$, 所以$e\neq e'$. 进一步, 由$\psi^{I\setminus\{i\}}_{e,m;j,k}$和$\tilde{\psi}^{I\setminus\{i\}}_{e,m;j,k}$的双正交性也可得(1). 利用紧支撑函数所满足的关系式$\left\langle\vec{f},\mathrm{curl}\,\vec{g}\right\rangle=\left\langle\mathrm{curl}\,\vec{f},\ \vec{g}\right\rangle$和$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}f)=\vec{0}$直接可得(2). 注意到

$$\left\langle\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k},\vec{\tilde{\psi}}^{\nabla}_{e',m';j',k'}\right\rangle=2^{j-1}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_{i_{e'}}}\psi^{I}_{e,m;j,k},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_{e'}\}}_{e',m';j',k'}\right\rangle=-2^{-j-1}\left\langle\psi^{I}_{e,m;j,k},\frac{\partial}{\partial x_{i_{e'}}}\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_{e'}\}}_{e',m';j',k'}\right\rangle.$$

由式(1-9)以及$\psi^{I}_{e,m}$和$\tilde{\psi}^{I}_{e,m}$的双正交性, 有

$$\left\langle\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k},\vec{\tilde{\psi}}^{\nabla}_{e',m';j',k'}\right\rangle=2^{j'-j}\left\langle\psi^{I}_{e,m;j,k},\tilde{\psi}^{I}_{e',m';j',k'}\right\rangle=\delta_{e,e'}\delta_{m,m'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}.$$

从而(3)得证.

下面证明(4): 由$\vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i}$和$\vec{\tilde{\psi}}^{\Delta}_{e,m,i}$的定义, 可知$\vec{\psi}^{\Delta}_{e_1,m_1,i_1;j_1,k_1}=\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_1}$且$\vec{\tilde{\psi}}^{\Delta}_{e_2,m_2,i_2;j_2,k_2}=\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\mathrm{curl}\,\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2}\delta_{i_2'}\right)_{j_2,k_2}=2^{-j_2}\frac{\varepsilon_1}{2}\mathrm{curl}\,\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\delta_{i_2'}$. 进一步,

$$\left\langle\vec{\psi}^{\Delta}_{e_1,m_1,i_1;j_1,k_1},\ \vec{\tilde{\psi}}^{\Delta}_{e_2,m_2,i_2;j_2,k_2}\right\rangle=2^{j_1-j_2}\left\langle\left(\mathrm{curl}\,\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1}\delta_{i_1}\right)_{j_1,k_1},\frac{\varepsilon_1}{2}\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\delta_{i_2'}\right\rangle.$$

根据式(5-2)和式(5-4), $\left(\mathrm{curl}\,\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1}\delta_{i_1}\right)_{j_1,k_1}=2\varepsilon_1\psi^{I\setminus\{i_1,i_{e_1}\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_1'}+\varepsilon_2\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1'}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1}\right)_{j_1,k_1}\delta_{i_{e_1}}=2\varepsilon_1\psi^{I\setminus\{i_1,i_{e_1}\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_1'}+2^{-j_1}\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_{i_1'}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_{e_1}}$. 因此, (4)等价于

$$\left\langle 2\varepsilon_1\psi^{I\setminus\{i_1,i_{e_1}\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_1'}+2^{-j_1}\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_{i_1'}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_{e_1}},\frac{\varepsilon_1}{2}\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\delta_{i_2'}\right\rangle=\delta_{e_1,e_2}\delta_{m_1,m_2}\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2}\delta_{k_1,k_2}.\quad(5\text{-}6)$$

如果 $e_1=e_2$，则 $i_{e_1}=i_{e_2}$．当 $i_1=i'_2$ 时，直接可得式（5-6）．当 $i_1=i_2,i'_1=i'_2$ 时，式（5-6）等价于 $2\varepsilon_1\cdot\frac{\varepsilon_1}{2}\left\langle\psi^{I\setminus\{i_1,i_{e_1}\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1},\ \tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\right\rangle=\delta_{m_1,m_2}\delta_{j_1,j_2}\delta_{k_1,k_2}$，这显然成立．下面只须证明：当 $e_1\neq e_2$ 时，

$$\left\langle 2\varepsilon_1\psi^{I\setminus\{i_1,i_{e_1}\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i'_1}+2^{-j_1}\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_{i'_1}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\delta_{i_{e_1}},\frac{\varepsilon_1}{2}\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,\ i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\delta_{i'_2}\right\rangle=0. \tag{5-7}$$

注意到 $i'_2\in\{i_1,i'_1,i_{e_1}\}$．当 $i'_2=i_1$ 时，结论显然成立．当 $i'_2=i'_1$ 时，有 $\{i_1,i_{e_1}\}=\{i_2,i_{e_2}\}$．此时，式（5-7）等价于显然成立的 $2\varepsilon_1\cdot\frac{\varepsilon_1}{2}\left\langle\psi^{I\setminus\{i_1,i_{e_1}\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1},\ \tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\right\rangle=0$. 因此，我们只须证明：当 $i'_2=i_{e_1}$ 时，式（5-7）成立．此时，式（5-7）等价于

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_{i'_1}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1},\ \tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\right\rangle=0. \tag{5-8}$$

因为 $\{i_1,i'_1,i_{e_1}\}=\{i_2,i'_2,i_{e_2}\}=I$，所以需要考虑两种情况：$i_2=i_1,\ i'_2=i_{e_1},i_{e_2}=i'_1$ 和 $i_2=i'_1$，$i'_2=i_{e_1},i_{e_2}=i_1$．第一种情况下，利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\eta}^-_m=-2\tilde{\eta}^+_m$ 和 $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$，

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_{i'_1}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2,i_{e_2}\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\right\rangle=-2^{j_2}\left\langle\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_2\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\right\rangle=0$$

从而式（5-8）得证．在第二种情况中，式（5-8）的左端变为 $\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}\right\rangle$. 根据微分关系式（1-7），$\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\psi^{I\setminus\{i_1\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}$ 是 $\psi^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}$ 和 $\psi^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1+\delta_{i_2}}$ 的线性组合．进一步，利用 $\psi^{I\setminus\{i_1,\ i_2\}}_{e_1,m_1;j_1,k_1}$ 和 $\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_1,i_2\}}_{e_2,m_2;j_2,k_2}$ 的双正交性质便得式（5-8）．

5.2 向量 Besov 空间的刻画

在本小节，我们将刻画一类向量 Besov 空间．首先介绍连续模的概念：$f(\cdot)\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 的 m 阶连续模 $\omega_m(f,t,L^p)=:\sup\limits_{|h|\leqslant t}\left\|\Delta^m_h(f,\cdot)\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$．所谓 Besov 空间 $B^s_q(L^p(\mathbf{R}^n))$ 是指所有满足

$$|f|_{B^s_q(L^p(\mathbf{R}^n))}=:\left\|\left\{2^{sj}\omega_m(f,\ 2^{-j},\ L^p(\mathbf{R}^n))\right\}\right\|_{\ell^q}<+\infty$$

的 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 的全体构成的集合，其中 $m=[s]+1$. 其上的范数定义为

$$\|f\|_{B^s_q(L^p(\mathbf{R}^n))}=:\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}+|f|_{B^s_q(L^p(\mathbf{R}^n))}.$$

下述关于 Besov 空间的性质可在参考文献[62]、[109]、[110]中找到：

（1）用任意大于 s 的整数 d 代替上述 m 得到等价的范数；

（2） $B^s_{q_1}(L^p(\mathbf{R}^n)) \subseteq B^s_{q_2}(L^p(\mathbf{R}^n))$，$q_1 \leqslant q_2$；$B^{s_1}_{q_1}(L^p(\mathbf{R}^n)) \subseteq B^{s_2}_{q_2}(L^p(\mathbf{R}^n))$，$s_1 \geqslant s_2$；

（3） $H^s(\mathbf{R}^3) = B^s_2(L^2(\mathbf{R}^3))$.

本节考虑的向量 Besov 空间是

$$\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3)) =: \left\{ \vec{f} \in (B^s_q(L^p(\mathbf{R}^3)))^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \in B^s_q(L^p(\mathbf{R}^3)),\ i=1,\ 2,\ 3;\ j \neq i \right. \right\},$$

其上的范数定义为

$$\left\| \vec{f} \right\|_{\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))} =: \sum_{i=1}^{3} \| f_i \|_{B^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 3 \\ j \neq i}} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{B^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}.$$

显然，当 $\vec{f} \in \hat{B}^s_p(L^p(\mathbf{R}^3))$ 时，$\mathrm{curl}\vec{f} \in (B^s_q(L^p(\mathbf{R}^3)))^3$. 首先给出下列简单但重要的引理.

引理 5.2.1 设 $f(x)$，$g(x) \in B^s_q(L^p(\mathbf{R}))$，$s>0$，$0<p$，$q \leqslant \infty$，则

$$f(x_1)g(x_2) \in B^s_q(L^p(\mathbf{R}^2)).$$

证明 设 $x = (x_1,\ x_2)$，$h=(h_1,\ h_2)$，则可以证明

$$\Delta^m_h fg(x) = \sum_{i_1,i_2,n_1,n_2} a_{i_1,i_2,n_1,n_2} \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+i_2h_2). \tag{5-9}$$

这里，$0 \leqslant n_1$，$n_2 \leqslant m$，$n_1+n_2=m$，$\Delta^0_{h_1}=\Delta^0_{h_2}=I$，$0 \leqslant i_1$，$i_2 \leqslant m$，而且 $i_1+n_1 \leqslant m$，$i_2+n_2 \leqslant m$. 事实上，注意到 $\Delta^1_h fg(x) = f(x_1+h_1)g(x_2+h_2) - f(x_1)g(x_2) = \Delta^1_{h_1} f(x_1) \cdot g(x_2+h_2) + f(x_1) \cdot \Delta^1_{h_2} g(x_2)$. 所以当 $m=1$ 时，式（5-9）成立. 现在假设式（5-9）对 $m-1$ 成立，则

$$\begin{aligned}
\Delta^m_h fg(x) &= \Delta^{m-1}_h fg(x+h) - \Delta^{m-1}_h fg(x) \\
&= \sum_{i_1,i_2,n_1,n_2} a_{i_1,i_2,n_1,n_2} \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+(i_1+1)h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+(i_2+1)h_2) \\
&\quad - \sum_{i_1,i_2,n_1,n_2} a_{i_1,i_2,n_1,n_2} \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+i_2h_2).
\end{aligned}$$

这里 $0 \leqslant n_1,\ n_2 \leqslant m-1,\ n_1+n_2=m-1,\ 0 \leqslant i_1,\ i_2 \leqslant m-1$，而且 $i_1+n_1 \leqslant m-1,\ i_2+n_2 \leqslant m-1$. 进一步，注意到

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+(i_1+1)h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+(i_2+1)h_2) - \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+i_2h_2) \\
&= \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+(i_1+1)h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+(i_2+1)h_2) - \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+(i_2+1)h_2) \\
&\quad + \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+(i_2+1)h_2) - \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+i_2h_2) \\
&= \Delta^{n_1+1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+(i_2+1)h_2) + \Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2+1}_{h_2} g(x_2+i_2h_2).
\end{aligned}$$

所以式（5-9）成立.

令 $m_0=[s]+1$. 因为 $\Delta^{2m_0}_h fg(x)$ 是形如 $\Delta^{n_1}_{h_1} f(x_1+i_1h_1) \cdot \Delta^{n_2}_{h_2} g(x_2+i_2h_2)$ 的线性组合，其中 $n_1+n_2=2m_0$，n_1，$n_2 \geqslant 0$ 且 i_1+n_1，$i_2+n_2 \leqslant 2m_0$，所以

$$\left\|\Delta_h^{2m_0} fg\right\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \lesssim \sum_{i_1,i_2,n_1,n_2} \left\|\Delta_{h_1}^{n_1} f(x_1+i_1h_1)\cdot\Delta_{h_2}^{n_2} g(x_2+i_2h_2)\right\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}.$$

注意到，要么 $n_1 \geqslant m_0$，要么 $n_2 \geqslant m_0$，故 $\left\|\Delta_h^{2m_0} fg\right\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \lesssim \sum_{n_1\geqslant m_0}\left\|\Delta_{h_1}^{n_1} f(x_1)\right\|_{L^p(\mathbf{R})}+\sum_{n_2\geqslant m_0}\left\|\Delta_{h_2}^{n_2} g(x_2)\right\|_{L^p(\mathbf{R})}$. 进一步，有

$$2^{js}\omega_{2m_0}(fg,\ 2^{-j},\ L^p(\mathbf{R}^2)) \lesssim \sum_{n_1\geqslant m_0} 2^{js}\omega_{n_1}(f,\ 2^{-j}, L^p(\mathbf{R}))+\sum_{n_2\geqslant m_0} 2^{js}\omega_{n_2}(f,\ 2^{-j},\ L^p(\mathbf{R})).$$

最后，由 $f,g\in B_q^s(L^p(\mathbf{R}))$ 和 $\ell^q(\mathbf{Z})$ 的线性性质，引理 5.2.1 得证.

设 $\alpha=(\alpha_j)_{j\geqslant j_0}$ 且 $\alpha_j=(\alpha_{j,k})_{k\in\mathbf{Z}^n}$，定义 $\|\alpha\|_{\ell^s_{p,q}}=:\left\|\left(2^{j\left(s-\frac{n}{p}\right)}\|\alpha_j\|_{\ell^p}\right)\right\|_{\ell^q}$. 下列引理成立([20]).

引理 5.2.2 若 $\phi\in B_\infty^\sigma(L^p(\mathbf{R}^n))$ 具有紧支撑，$0<p,\ q\leqslant\infty$，$0<s<\sigma$，则

$$\left\|\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\beta_k\,\phi(2^j\cdot-k)\right\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^n))} \lesssim 2^{\left(s-\frac{n}{p}\right)j}\|\beta\|_{\ell^p},$$

$$\left\|\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\alpha_{j,k}\phi(2^j\cdot-k)\right\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^n))} \lesssim \|\alpha\|_{\ell^s_{p,q}}.$$

定理 5.2.1 设 $0<s<1+\frac{1}{p}$，$0<p,\ q\leqslant\infty$，则

(1) $\left\|\sum_k \beta_{m,i,k}\vec{\varphi}_{m,i;j_0,k}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))} \lesssim \|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}$；

(2) $\left\|\sum_{j\geqslant j_0}\sum_k \alpha^\nabla_{e,m;j,k}\vec{\psi}^\nabla_{e,m;j,k}\right\|_{\hat{B}_p^s(L^p(\mathbf{R}^3))} \lesssim \|\alpha^\nabla_{e,m}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}$；

(3) $\left\|\sum_{j\geqslant j_0}\sum_k \alpha^\Delta_{e,m,i;j,k}\vec{\psi}^\Delta_{e,m,i;j,k}\right\|_{\hat{B}_p^s(L^p(\mathbf{R}^3))} \lesssim \|\alpha^\Delta_{e,m,i}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\ (i\neq i_e)$.

证明 记 $\vec{h}=:\sum_k\beta_{m,i;k}\vec{\varphi}_{m,i;j_0,k}$，$h_i$ 是 $\vec{h}$ 的第 i 个分量，则 $h_i=\sum_k\beta_{m,i;k}\phi_m^{I\setminus\{i\}}(2^{j_0}x-k)$ 且 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}h_i=\sum_k\beta_{m,i;k}2^{j_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_m^{I\setminus\{i\}}\right)(2^{j_0}x-k)$. 因为 $\xi_m^+\in B_\infty^{2+\frac{1}{p}}(L^p(\mathbf{R}))\subseteq B_\infty^{1+\frac{1}{p}}(L^p(\mathbf{R}))$，$\xi_m^-\in B_\infty^{1+\frac{1}{p}}(L^p(\mathbf{R}))$，由引理 5.2.1 知，当 $\mu\neq i$ 时，$\phi_m^{I\setminus\{i\}}$，$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_m^{I\setminus\{i\}}\in B_\infty^{1+\frac{1}{p}}(L^p(\mathbf{R}^3))$. 进一步，利用引理 5.2.2 的第一个不等式，有

$$\|h_i\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))} \lesssim \|\beta_{m,i}\|_{\ell^p} \quad 和 \quad \left\|\frac{\partial}{\partial x_\mu}h_i\right\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))} \lesssim \|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}.$$

最后，由定义知$\|\vec{h}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}\lesssim\|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}$. 从而（1）得证.

令 $\vec{g}=:\sum\limits_{j\geqslant j_0}\sum\limits_{k}\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k}$，而 g_v 是 $\vec{g}$ 的第 $v(1\leqslant v\leqslant 3)$ 个分量. 由 $\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m}$ 的定义，

$g_v=\sum\limits_{j\geqslant j_0}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^3}\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\left(\frac{\partial}{\partial x_v}\psi^I_{e,m}\right)(2^j x-k)$ 且

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}g_v=\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}2^j\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_v}\psi^I_{e,m}\right)(2^j x-k).$$

类似地，$\frac{\partial}{\partial x_v}\psi^I_{e,m}$，$\frac{\partial^2}{\partial x_v\partial x_\mu}\psi^I_{e,m}\in B_\infty^{1+\frac{1}{p}}(L^p(\mathbf{R}^3))$. 根据引理 5.2.2，有

$$\|g_v\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}\lesssim\|\alpha^{\nabla}_{e,m}\|_{\ell^s_{p,q}}\lesssim\|\alpha^{\nabla}_{e,m}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\quad 和\quad \left\|\frac{\partial}{\partial x_\mu}g_v\right\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}\lesssim\|\alpha^{\nabla}_{e,m}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}.$$

因此，$\left\|\sum\limits_{j\geqslant j_0}\sum\limits_{k}\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}\lesssim\|\alpha^{\nabla}_{e,m}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}$. 不等式（2）得证. 最后的不等式（3）类似可证.

为证明定理 5.2.2，需要参考文献[20]中的两个引理. 和通常一样，我们用$W^\mu_\tau(D)$表示区域D上正则性指数为μ的 Sobolev 空间. 令

$$E_d(f,\ W^\mu_\tau(D))=:\inf_{P\in\prod_{d-1}}\|f-P\|_{W^\mu_\tau(D)}.$$

引理 5.2.3　设$\frac{1}{p}-\frac{1}{\tau}+\mu<s$，$\mu\in\boldsymbol{N}_0$，$0<p$，$q\leqslant\infty$，$1\leqslant\tau\leqslant\infty$. 若$\sigma_k\subset\sigma+k$，$k\in\mathbf{Z}^n$，

则$\left[\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^n}\|f\|^p_{W^\mu_\tau(\sigma_k)}\right]^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^n))}$.

引理 5.2.4　设$\frac{n}{p}-\frac{n}{\tau}+\mu<s<d$, $s>0$, $\mu\in\boldsymbol{N}_0$，$0<p$，$q\leqslant\infty$, $1\leqslant\tau\leqslant\infty$. 若$\sigma_{j,k}\subset 2^{-j}$（$\sigma+k$），$j\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}^n$，则

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left[2^{j\left(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{\tau}-\mu\right)}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}E^p_d(f,\ W^\mu_\tau(\sigma_{j,k}))\right)^{\frac{1}{p}}\right]^q\lesssim|f|^q_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^n))}.$$

定理 5.2.2　设 $\beta_{m,i}=\left(\left\langle\vec{f},\ \vec{\psi}_{m,i;j_0,k}\right\rangle\right)_{k\in\mathbf{Z}^3}$, $\alpha^{\nabla}_{e,m}=\left(\left\langle\vec{f},\ \vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k}\right\rangle\right)_{j\geqslant j_0,k\in\mathbf{Z}^3}$ 和 $\alpha^{\Delta}_{e,m,i}=\left(\left\langle\vec{f},\ \vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i;j,k}\right\rangle\right)_{j\geqslant j_0,k\in\mathbf{Z}^3}$（$j_0\in\mathbf{Z}$）. 如果$1+\frac{3}{p}<s<3$，$0<p,q\leqslant\infty$, 则

（1）$\|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}\lesssim\|\vec{f}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}$；

（2）$\|\alpha^{\Delta}_{e,m,i}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\lesssim\|\vec{f}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}$；

（3）$\|\alpha_{e,m}^{\nabla}\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}\lesssim\|\vec{f}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}$.

证明 设 $\sigma=:[-1,1]^3\subset\mathbf{R}^3,\sigma_{j,k}=2^{-j}(\sigma+k)$. 注意到 $\beta_{m,i;k}=\left\langle\vec{f},\ \tilde{\vec{\varphi}}_{m,i;j_0,k}\right\rangle=\left\langle f_i,\tilde{\phi}_{m;j_0,k}^{I\setminus\{i\}}\right\rangle$. 不失一般性, 假设 $i=1$, 证明

$$\|\beta_{m,1}\|_{\ell^p}=\|\langle f_1,\ \tilde{\phi}_{m;j_0,k}^{\{2,3\}}\rangle_{k\in\mathbf{Z}^3}\|_{\ell^p}\lesssim\|\vec{f}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}.$$

当 $m_2=m_3=1$ 时, 由 $\xi_m^+(m=1,2)$ 的定义知 $|\langle f_1,\tilde{\phi}_{m,j_0,k}^{\{2,3\}}\rangle|\leqslant\|f_1\|_{L^\infty(\sigma_{j_0,k})}$.

进一步, 利用引理 5.2.3, $\|\beta_{m,1}\|_{\ell^p}=\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}|\beta_{m,1;k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}\|f_1\|_{L^\infty(\sigma_{j_0,k})}^p\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f_1\|_{B_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}\lesssim$ $\|\vec{f}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}$; 当 $m_3=2$（类似地, $m_2=2$）时, 有

$$\left|\left\langle f_1,\tilde{\phi}_{m;j_0,k}^{\{2,3\}}\right\rangle\right|=2^{-j_0}\left|\left\langle\frac{\partial f_1}{\partial x_3},\tilde{\phi}_{m;j_0,k}^{\{2\}}\right\rangle\right|\leqslant 2^{-j_0}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right\|_{W_\infty^1(\sigma_{j_0,k})}.$$

注意到 $1+\frac{1}{p}<s<3$ 和 $\|\vec{f}\|_{\hat{B}_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))}$ 的定义,（1）得证.

为估计 $\alpha_{e,m,i;j,k}^{\Delta}$ 和 $\alpha_{e,m;j,k}^{\nabla}$, 首先声明: 对 $h\in B_q^s(L^p(\mathbf{R}^3))$,

$$|\langle h,\tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle|\lesssim 2^{-j}E_3(h,W_\infty^1(\sigma_{j,k}))\tag{5-10}$$

或

$$|\langle h,\ \tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle|\lesssim E_3(h,L^\infty(\sigma_{j,k})).\tag{5-11}$$

事实上, 由对偶小波的消失矩性质: 对任意的 $P\in\prod_2$, $\langle h,\ \tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle=\langle h-P,\ \tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle$.

当 $e(i')=1$ 或者 $e(i')=0$ 且 $m(i')=2$ 时, 由微分关系式（1-11）可知

$$|\langle h,\ \tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle|\lesssim 2^{-j}\left|\left\langle\frac{\partial}{\partial x_{i'}}(h-P),\ \tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\varnothing}\right\rangle\right|\lesssim 2^{-j}\|h-P\|_{W_\infty^1(\sigma_{j,k})}.$$

进一步, 由 $E_3(h,\ W_\infty^1(\sigma_{j,k}))$ 的定义即得式（5-10）.

当 $e(i')=0$ 且 $m(i')=1$ 时, $|\langle h,\ \tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle|=|\langle h-P,\tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\rangle|\lesssim\|h-P\|_{L^\infty(\sigma_{j,k})}$. 这样, 由 $E_3(h,\ L^\infty(\sigma_{j,k}))$ 的定义得出式（5-11）.

下面估计 $\alpha_{e,m,i;j,k}^{\Delta}$ 和 $\alpha_{e,m;j,k}^{\nabla}$. 由 $\tilde{\vec{\psi}}_{e,m,i}^{\Delta}$ 的定义,

$$\alpha_{e,m,i;j,k}^{\Delta}=:\left\langle\vec{f},\tilde{\vec{\psi}}_{e,m,i;j,k}^{\Delta}\right\rangle=2^{-j-1}\varepsilon_1\left\langle\operatorname{curl}\vec{f},\tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{I\setminus\{i,i_e\}}\delta_{i'}\right\rangle.$$

进一步, 有

$$\left|\alpha_{e,m,i;j,k}^{\Delta}\right|=2^{-j-1}\left|\left\langle\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}}-\frac{\partial f_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\right\rangle\right|\leqslant 2^{-j-1}\left(\left|\left\langle\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}},\tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\right\rangle\right|+\left|\left\langle\frac{\partial f_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}_{e,m;j,k}^{\{i'\}}\right\rangle\right|\right).$$

定义 $\beta^{\Delta}_{e,m,i;j,k}=:2^{-j-1}\left|\left\langle\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}},\ \tilde{\psi}^{\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|$ 和 $\gamma^{\Delta}_{e,m,i;j,k}=:2^{j-1}\left|\left\langle\frac{\partial f_{i_e}}{\partial x_i},\ \tilde{\psi}^{\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|$. 则只须证明 $\left\|\beta^{\Delta}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}$ 和 $\left\|\gamma^{\Delta}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}$.

在式（5-10）和式（5-11）中令 $h=:\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}}$，则 $\beta^{\Delta}_{e,m,i;j,k}\lesssim 2^{2j}E_3(h,\ W^1_\infty(\sigma_{j,k}))$ 或 $\beta^{\Delta}_{e,m,i;j,k}\lesssim 2^{j}E_3(h,\ L^\infty(\sigma_{j,k}))$. 注意到 $\|\alpha\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}=:\left\|\left(2^{j(s+1-\frac{3}{p})}\left\|\alpha_j\right\|_{\ell^p}\right)\right\|_{\ell^q}$. 利用引理 5.2.4（在第一种情形取 $\mu=1$，在第二种情形取 $\mu=0$），得到

$$\left\|\beta^{\Delta}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\lesssim\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}}\right|_{B^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}.$$

类似可证 $\left\|\gamma^{\Delta}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}$. 故（2）得证.

最后估计 $\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}=:\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\psi}}^{\nabla}_{e,m;j,k}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle f_{i_e},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_e\}}_{e,m;j,k}\right\rangle$. 不失一般性，设 $i_e=1$，则 $\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}=\frac{1}{2}\left\langle f_1,\tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle$. 注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\eta}_m=-2\tilde{\eta}^+_m$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}^-_2=-\tilde{\xi}^+_2$. 当 $e_2=1$ 或 $e_3=1$ 或 $m_2=2$ 或 $m_3=2$ 时，

$$\left|\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\right|\lesssim 2^{-j}\left|\left\langle\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\ \tilde{\psi}^{\{l\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|,$$

其中，$i,l\in\{2,\ 3\}$ 且 $i\neq l$. 类似于上面的情形，可以证明

$$\left|\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\right|\lesssim 2^{-2j}E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\ W^1_\infty(\sigma_{j,k})\right)\ \text{或}\ \left|\alpha^{\nabla}_{e,m;j,k}\right|\lesssim 2^{-j}E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\ L^\infty(\sigma_{j,k})\right).$$

进一步可得（3）. 剩下须考虑的情形是 $e_2=e_3=0$ 且 $m_2=m_3=1$. 令 $\sigma_0=:\sigma\setminus\{x_2=-1\}$ 和 $\sigma^0_{j,k}=:2^{-j}(\sigma_0+k)$. 对任意定义在 $\sigma^0_{j,k}$ 上的 $P\in\prod_2$，设 $g(x_1,\ \cdot,\ x_3)$ 是 $P(x_1,\ \cdot,\ x_3)$ 的一个原函数，即

$$g(x_1,\ x_2,\ x_3)=:\int P(x_1,\ x_2,\ x_3)\mathrm{d}x_2$$

且 $g\big|_{x_2-2^{-j}(k_2-1)}=:f_1\big|_{x_2=2^{-j}(k_2-1)}$. 进一步，结合微分关系式（1-9）得到

$$\left\langle f_1-g,\tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle=-2^{j}\left\langle f_1-g,\ \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\psi}^{\{3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle+\left\langle f_1-g,\tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k-\delta_2}\right\rangle=-2^{j}\left\langle f_1-g,\ \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\psi}^{\{3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle.$$

因为 $e_1=1$ 且 $\tilde{\eta}^-_m$ 具有三阶消失矩，所以 $\left\langle g,\tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$. 从而

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f_1,\tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|&=\left|\left\langle f_1-g,\tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|=2^{j}\left|\left\langle\frac{\partial}{\partial x_2}(f_1-g),\tilde{\psi}^{\{3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\\&\lesssim 2^{j}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_{L^\infty(\sigma^0_{j,k})}=2^{-j}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-P\right\|_{L^\infty(\sigma^0_{j,k})}.\end{aligned}$$

故$\left|\left\langle f_1, \tilde{\psi}^{\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right| \lesssim 2^{-j} E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, L^\infty(\sigma^0_{j,k})\right)$. 利用引理 5.2.4 便得（3）.

综合定理 5.2.1 和定理 5.2.2, 得到下面的推论.

推论 5.2.1 设$0<p, q\leqslant\infty$, 如果$(\beta_{m,i;k})_k\in\ell^p$, $(\alpha^\Delta_{e,m,i;j,k})_{j,k}$, $(\alpha^\nabla_{e,m;j,k})_{j,k}\in\ell^{s+1}_{p,q}$且$0<s<1+\frac{1}{p}$, 则

$$\left\|\sum_{m,i,k}\beta_{m,i,k}\vec{\varphi}_{m,i;j_0,k}+\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{e,m,k}\left(\sum_{i\neq i_e}\alpha^\Delta_{e,m,i;j,k}\vec{\psi}^\Delta_{e,m,i;j,k}+\alpha^\nabla_{e,m;j,k}\vec{\psi}^\nabla_{e,m;j,k}\right)\right\|_{\hat{B}^s_p(L^p(\mathbf{R}^3))}$$

$$\lesssim\sum_{m,i}\|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}+\sum_{e,m}\left(\sum_{i\neq i_e}\|\alpha^\Delta_{e,m,i}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}+\|\alpha^\nabla_{e,m}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\right);$$

反过来, 如果$\vec{f}\in\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))$且$1+\frac{3}{p}<s<3$, 则序列$\beta_{m,i}=\left(\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\varphi}}_{m,i;j_0,k}\right\rangle\right)_{k\in\mathbf{Z}^3}$, $\alpha^\nabla_{e,m}=\left(\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\psi}}^\nabla_{e,m;j,k}\right\rangle\right)_{j\geqslant j_0,k\in\mathbf{Z}^3}$和$\alpha^\Delta_{e,m,i}=\left(\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\psi}}^\Delta_{e,m,i;j,k}\right\rangle\right)_{j\geqslant j_0,k\in\mathbf{Z}^3}$, $j_0\in\mathbf{Z}$满足

$$\sum_{m,i}\|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}+\sum_{e,m}\left(\sum_{i\neq i_e}\|\alpha^\Delta_{e,m,i}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}+\|\alpha^\nabla_{e,m}\|_{\ell^{s+1}_{p,q}}\right)\lesssim\|\vec{f}\|_{\hat{B}^s_q(L^p(\mathbf{R}^3))}.$$

注记 5.2.1 应该指出的是, 没有共同的s使推论 5.2.1 中的两个估计都成立. 实际上, 这是一个很大的缺陷. 然而在很多情况下, 只需其中的一个估计. 例如, 推论 5.2.1 中的第一个估计可帮助证明 5.3 节中的主要定理.

5.3 无旋度小波的稳定性

由于本章的小波均是在 Donoho 意义下定义的, 故它们不可能构成$L^2(\mathbf{R}^3)^3$中的 Riesz 基. 然而我们将证明: 5.1 节构造的单尺度小波基在$L^2(\mathbf{R}^3)^3$意义下是稳定的. 设$k\in\mathbf{Z}^3$, $\sigma=:[-1, 1]^3$, 定义

$$A_k=:\{l\in\mathbf{Z}^3, \operatorname{supp}\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;0,l}\cap(\sigma+k)\neq\varnothing\}.$$

引理 5.3.1 对每一个$k\in\mathbf{Z}^3$, 函数系$\left\{\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;0,l}\middle|e\in E^*_3, m\in\{1, 2\}^3, l\in A_k\right\}$在$\sigma+k$上是线性无关的.

证明 不失一般性, 假设$k=0$. 由于$\{f_i(x), i=1, 2, \cdots, m\}$和$\{g_j(y), j=1, 2, \cdots, n\}$的线性无关性蕴涵$\{f_i(x)g_j(y), 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n\}$也是线性无关的. 因此, 根据$\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m}$的定义, 只须证明$\{\xi^+_1(x-1), \xi^+_1(x), \xi^+_1(x+1), \xi^+_2(x-1), \xi^+_2(x), \xi^+_2(x+1), \eta^+_1(x), \eta^+_1(x+1), \eta^+_2(x), \eta^+_2(x+1)\}$和$\{\xi^-_1(x-1), \xi^-_1(x), \xi^-_2(x-1), \xi^-_2(x), \xi^-_2(x+1), \eta^-_1(x), \eta^-_1(x+1), \eta^-_2(x), \eta^-_2(x+1)\}$分别在$[-1, 1]$上线性无关即可. 下面只证明第一部分, 第二部分类似可证. 假设

$$a_1\xi^+_1(x-1)+a_2\xi^+_1(x)+a_3\xi^+_1(x+1)+b_1\xi^+_2(x-1)+b_2\xi^+_2(x)+b_3\xi^+_2(x+1)$$

$$+c_1\eta_1^+(x)+c_2\eta_1^+(x+1)+d_1\eta_2^+(x)+d_2\eta_2^+(x+1)=0 \tag{5-12}$$

对任意 $x\in[-1,1]$ 成立．因为 $\xi_2^+(k)=\eta_m^+(k)=0$ 和 $\xi_1^+(k)=\delta_{k,0}$，所以在式(5-12)中取 $x=0,\pm1$ 即得 $a_1=a_2=a_3=0$；类似地，因为 $\eta_m^-(k)=0$ 和 $\xi_2^-(k)=\delta_{k,0}$，所以在式（5-12）的两端求导，然后取 $x=0,\pm1$ 可得 $b_1=b_2=b_3=0$；现在，式（5-12）转化为

$$c_1\eta_1^+(x)+c_2\eta_1^+(x+1)+d_1\eta_2^+(x)+d_2\eta_2^+(x+1)=0 \tag{5-13}$$

对任意 $x\in[-1,1]$ 成立．注意到 $\eta_1^+\left(\frac{k}{2}\right)=\delta_{k,1}$ 和 $\eta_2^+\left(\frac{k}{2}\right)=0$．在式（5-13）中取 $x=\pm\frac{1}{2}$ 可得 $c_1=c_2=0$；最后，由于 $\eta_2^-\left(\frac{k}{2}\right)=\delta_{k,1}$，式(5-13)两边求导并取 $x=\pm\frac{1}{2}$ 得 $d_1=d_2=0$．引理得证．

定理 5.3.1 向量函数系 $\left\{2^{\frac{3j}{2}}\vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i;j,k},\ 2^{\frac{3j}{2}}\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k}\,\middle|\,e\in E_3^*,m\in\{1,2\}^3,k\in\mathbf{Z}^3,i\neq i_e\right\}$ 构成 $\vec{W}_j$ 的 Riesz 基，并且 Riesz 界不依赖于 j．

证明 利用引理 5.1.1，只须证明函数系的稳定性．不失一般性，令

$$\vec{\omega}=:\sum_{e,m,k}\left(d^{\nabla}_{e,m;k}\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;0,k}+\sum_{i\neq i_e}d^{\Delta}_{e,m,i;k}\vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i;0,k}\right)\in\vec{W}_0. \tag{5-14}$$

则对 $s>0$，有 $\|\vec{\omega}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}\leqslant\|\vec{\omega}\|_{H^s(\mathbf{R}^3)}$．因为 $H^s(\mathbf{R}^3)=B_2^s(L^2(\mathbf{R}^3))$，所以 $\|\vec{\omega}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}\lesssim\|\vec{\omega}\|_{\dot{B}_2^s(L^2(\mathbf{R}^3))}$．进一步，由推论 5.2.1 的第一个估计得 $\|\vec{\omega}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}\lesssim\|d\|_{\ell^2}=:\left[\sum_{e,m,k}\left(\sum_{i\neq i_e}|d^{\Delta}_{e,m,i;k}|^2+|d^{\nabla}_{e,m;k}|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$．剩下的任务是证明

$$\sum_k|d^{\Delta}_{e,m,i;k}|^2\lesssim\|\vec{\omega}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} \tag{5-15}$$

及

$$\sum_k|d^{\nabla}_{e,m;k}|^2\lesssim\|\vec{\omega}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}. \tag{5-16}$$

事实上，$\left|d^{\Delta}_{e,m,i;k}\right|=\left|\left\langle\vec{\omega},\vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i;0,k}\right\rangle\right|=\frac{1}{2}\left|\left\langle\frac{\partial\omega_i}{\partial x_{i_e}}-\frac{\partial\omega_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}^{\{i'\}}_{e,m;\,0,k}\right\rangle\right|$．根据 $\xi_m^{\pm}$ 和 $\eta_m^{\pm}$ 的定义，有

$$\left|d^{\Delta}_{e,m,i;k}\right|\lesssim\left\|\frac{\partial\omega_i}{\partial x_{i_e}}\right\|_{L^\infty(\sigma+k)}+\left\|\frac{\partial\omega_{i_e}}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\sigma+k)}+\left\|\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_{i_e}\partial x'}\right\|_{L^\infty(\sigma+k)}+\left\|\frac{\partial^2\omega_{i_e}}{\partial x_i\partial x'}\right\|_{L^\infty(\sigma+k)}. \tag{5-17}$$

对 $v\in I$，令 $\omega_v=\sum_{e,m,l}a_{e,m;l}\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;\,0,l}$．则当 $\mu,\lambda\in I\setminus\{v\}$ 时，$\left\|\frac{\partial\omega_v}{\partial x_\mu}\right\|_{L^\infty(\sigma+k)}$ 和 $\left\|\frac{\partial^2\omega_v}{\partial x_\mu\partial x_\lambda}\right\|_{L^\infty(\sigma+k)}$ 可以被 $C\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}|a_{e,m;l}|$ 控制．因为 A_k 的基数是有限的且不依赖于 k，所以

$$\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}|a_{e,m;l}|\lesssim\left(\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}|a_{e,m;l}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5-18}$$

注意到$\|fX_{\sigma+k}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}=\|f\|^2_{L^2(\sigma+k)}$和$\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}\left|\left(f,\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;0,l}\right)_{L^2(\sigma+k)}\right|^2=\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}\left|\left(fX_{\sigma+k},\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;0,l}\right)_{L^2(\mathbf{R}^3)}\right|^2$.

因为$\{\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;\ 0,k};e\in E_3^*,m\in\{1,2\}^3,k\in\mathbf{Z}^3\}$是 Riesz 系，所以存在$0<m\leqslant M$使得

$$m\|f\|^2_{L^2(\sigma+k)}\leqslant\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}\left|\left((f,\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;\ 0,l}\right)_{L^2(\sigma+k)}\right|^2\leqslant M\|f\|^2_{L^2(\sigma+k)}.$$

再利用引理 5.3.1 知$\{\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;\ 0,l}|e\in E_3^*,m\in\{1,\ 2\}^3,l\in A_k\}$是$L^2(\sigma+k)$中的 Riesz 系，因此,

$$\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}|a_{e,m;l}|^2\lesssim\int_{\sigma+k}\left|\sum_{e,m}\sum_{l\in A_k}a_{e,m;k}\,\psi^{I\setminus\{v\}}_{e,m;\ 0,l}\right|^2\mathrm{d}x=\|\omega_v\|^2_{L^2(\sigma+k)}.$$

由式(5-17)和式(5-18)可得$\left|d^{\Delta}_{e,m,i;k}\right|^2\lesssim\|\omega_i\|^2_{L^2(\sigma+k)}+\|\omega_{i_e}\|^2_{L^2(\sigma+k)}$. 最后，$\sum_k\left|d^{\Delta}_{e,m,i;k}\right|^2\lesssim\|\vec{\omega}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}$.
从而式（5-15）获证.

为估计$\left|d^{\nabla}_{e,m;k}\right|$，设$I=\{i,i_e,i'\}$，则

$$\left|d^{\nabla}_{e,m;k}\right|=\left|\left\langle\vec{\omega},\vec{\tilde{\psi}}^{\nabla}_{e,m;\ 0,k}\right\rangle\right|=\frac{1}{2}\left|\left\langle\omega_{i_e},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i_e\}}_{e,m;\ 0,k}\right\rangle\right|=\frac{1}{2}\left|\left\langle\omega_{i_e},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i,i'\}}_{e,m;\ 0,k}\right\rangle\right|.$$

当$e_i=e_{i'}=0$且$m_i=m_{i'}=1$时，$\left|d^{\nabla}_{e,m;k}\right|\lesssim\|\omega_{i_e}\|_{L^\infty(\sigma+k)}$；在其他情形，有

$$\left|d^{\nabla}_{e,m;k}\right|\lesssim\left|\left\langle\frac{\partial\omega_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}^{\{i'\}}_{e,m;\ 0,k}\right\rangle\right|+\left|\left\langle\frac{\partial\omega_{i_e}}{\partial x_{i'}},\tilde{\psi}^{\{i\}}_{e,m;\ 0,k}\right\rangle\right|.$$

类同于（5-15），可以证明$\left|d^{\vee}_{e,m;k}\right|^2\lesssim\|\omega_{i_e}\|^2_{L^2(\sigma+k)}$. 进一步，$\sum_k\left|d^{\vee}_{e,m;k}\right|^2\lesssim\|\vec{\omega}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}$. 定理得证.

定义$\vec{W}^{\nabla}_j=:\left\{\vec{f}\in\vec{W}_j\middle|\mathrm{curl}\,\vec{f}=\vec{0}\right\}$，则下列推论成立.

推论 5.3.1 函数系$\{2^{\frac{3j}{2}}\vec{\psi}^{\nabla}_{e,m;j,k}|e\in E_3^*,m\in\{1,\ 2\}^3,k\in\mathbf{Z}^3\}$构成$\vec{W}^{\vee}_j$的 Riesz 基，并且 Riesz 界不依赖于$j$.

证明 注意到式（5-14）和$\vec{\tilde{\psi}}^{\Delta}_{e,m,i}=:\frac{\varepsilon_1}{2}\mathrm{curl}\,\tilde{\psi}^{I\setminus\{i,i_e\}}_{e\ m}\delta_{i'}$, 则

$$d^{\Delta}_{e,m,i;k}=\left\langle\vec{\omega},\vec{\tilde{\psi}}^{\ \Delta}_{e,m,i;\ 0,k}\right\rangle=\frac{\varepsilon_1}{2}\left\langle\mathrm{curl}\,\vec{\omega},\tilde{\psi}^{I\setminus\{i,i_e\}}_{e,m;\ 0,k}\delta_{i'}\right\rangle.$$

因此，$\vec{\omega}$是无旋度的当且仅当$d^{\Delta}_{e,m,i;k}=0$. 推论得证.

第 6 章　方体上插值无旋度小波及应用

由于许多实际问题都是定义在有界区域上，利用区域上的小波更加合理．本章及其后的几章主要介绍有界区域上的无旋度小波理论．

6.1　方体上的插值无旋度小波

本小节主要利用Hermite样条构造方体上的插值无旋度向量小波．首先给出下列记号:

$$\mathbf{Z}_j^0=:\left\{0,1,\cdots,2^j\right\},\ \mathbf{Z}_j^1=:\left\{1,2,\cdots,2^j\right\},$$

$$\mathbf{Z}_j^2=:\left\{0,1,\cdots,2^j-1\right\},\ \mathbf{Z}_j^3=:\left\{1,2,\cdots,2^j-1\right\}.$$

对每一个 $j\geqslant j_0$，定义[0, 1]上的尺度函数:

$$\xi_{m;j,k}^{\Delta,+}=:\xi_m^+(2^jx-k)\chi_{[0,1]},\ m=1,2,k\in\mathbf{Z}_j^0;$$

$$\xi_{1;j,k}^{\Delta,-}=:\xi_1^-(2^jx-k)\chi_{[0,1]}=\xi_1(2^jx-k),\ k\in\mathbf{Z}_j^1;$$

$$\xi_{2;j,k}^{\Delta,-}=:\xi_2(2^jx-k)\chi_{[0,1]},\ k\in\mathbf{Z}_j^0.$$

进一步，定义尺度空间

$$V_j^{\Delta,+}=:\operatorname{span}\left\{\xi_{1;j,k}^{\Delta,+},\xi_{2;j,k}^{\Delta,+}\middle|k\in\mathbf{Z}_j^0\right\},$$

$$V_j^{\Delta,-}=:\operatorname{span}\left\{\xi_{1;j,k_1}^{\Delta,-},\xi_{2;j,k_2}^{\Delta,-}\middle|k_1\in Z_j^1,k_2\in\mathbf{Z}_j^0\right\},$$

则$\left\{V_j^{\Delta,+}\right\}$和$\left\{V_j^{\Delta,-}\right\}$是$L^2([0,1])$上的多尺度分析．对应的对偶$\tilde{\xi}_{m;j,k}^{\Delta,\pm}$是

$$\tilde{\xi}_1^+=:\delta_0,\left\langle f,\tilde{\xi}_{1;j,k}^{\Delta,+}\right\rangle=f(2^{-j}k),\ k\in\mathbf{Z}_j^0;$$

$$\tilde{\xi}_2^+=:-\delta'_0,\left\langle f,\tilde{\xi}_{2;j,k}^{\Delta,+}\right\rangle=2^{-j}f'(2^{-j}k),\ k\in\mathbf{Z}_j^0;$$

$$\tilde{\xi}_1^-=:\chi_{[0,1]},\left\langle f,\tilde{\xi}_{1;j,k}^{\Delta,-}\right\rangle=2^j\int_{2^{-j}(k-1)}^{2^{-j}k}f(x)\mathrm{d}x,\ k\in\mathbf{Z}_j^1;$$

$$\tilde{\xi}_2^-=:\delta_0,\left\langle f,\tilde{\xi}_{2;j,k}^{\Delta,-}\right\rangle=f(2^{-j}k),\ k\in\mathbf{Z}_j^0.$$

在[0, 1]上的插值多小波以及小波空间定义如下:

$$\eta_{m;j,k}^{\Delta,\pm}(x)=:\eta_{m;j,k}^{\pm}(x)\chi_{[0,1]}=\eta_{m;j,k}^{\pm}(x),\ k\in\mathbf{Z}_j^2;$$

$$W_j^{\Delta,\pm}=:\operatorname{span}\left\{\eta_{m;j,k}^{\Delta,\pm}\middle|m=1,\ 2,\ k\in\mathbf{Z}_j^2\right\},$$

其中，$\eta_m^+=:\xi_m^+(2\cdot-1),m=1,2;\eta_1=:\xi_1(2\cdot-1)-\xi_1^-(2\cdot-2);\eta_2=:\xi_2^-(2\cdot-1)$.

对应的对偶为广义函数

$$\tilde{\eta}_1^+=:\delta_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\delta_0-\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{8}\delta_0'-\frac{1}{8}\delta_1',\ \tilde{\eta}_2^+=:\frac{3}{4}\delta_0-\frac{3}{4}\delta_1-\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}'-\frac{1}{8}\delta_0'-\frac{1}{8}\delta_1',$$

$$\tilde{\eta}_1^-=:\chi_{[0,\frac{1}{2}]}-\chi_{[\frac{1}{2},1]}-\frac{1}{4}\delta_0+\frac{1}{4}\delta_1,\ \tilde{\eta}_2=:\delta_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\delta_0+\frac{1}{4}\delta_1-\frac{3}{2}\chi_{[0,1]}.$$

这里，$\left\langle f,\tilde{\eta}_{m;j,k}^{\Delta,\pm}\right\rangle=\left\langle f(\frac{\cdot+k}{2^j}),\tilde{\eta}_m^{\pm}\right\rangle$．而且下列微分关系成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_{1;j,k}^{\Delta,+}(x)=2^j\left[\xi_{1;j,k}^{\Delta,-}(x)-\xi_{1;j,k}^{\Delta,-}(x-2^{-j})\right],\ k\in\mathbf{Z}_j^3;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_{1;j,0}^{\Delta,+}(x)=-2^j\xi_{1;j,1}^{\Delta,-}(x),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_{1;j,2^j}^{\Delta,+}=2^j\xi_{1;j,2^j}^{\Delta,-};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_{2;j,k}^{\Delta,+}=2^j\xi_{2;j,k}^{\Delta,-},k\in\mathbf{Z}_j^0;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta_{m;j,k}^{\Delta,+}=2^{j+1}\eta_{m;j,k}^{\Delta,-},k\in\mathbf{Z}_j^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_{1;j,k}^{\Delta,-}=-2^j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_{1;j,k}^{\Delta,+}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_{1;j,k-1}^{\Delta,+}\right),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_{2;j,k}^{\Delta,-}=-2^j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\xi}_{2;j,k}^{\Delta,+}.$$

令 $I\subseteq\{1,2,3\}=:I_0$，定义尺度函数

$$\varphi_m^I(x_1,x_2,x_3)=\prod_{v=1}^{3}\xi_{m_v,v}^I(x_v),m=(m_1,m_2,m_3,)^{\mathrm{T}}\in\{1,2\}^3,$$

其中，$\xi_{\mu,v}^I=\begin{cases}\xi_\mu^+,v\in I,\\ \xi_\mu,v\notin I.\end{cases}$ 对应的小波为

$$\psi_{e,m}^I(x_1,x_2,x_3)=:\prod_{v=1}^{3}\vartheta_{e_v,m_v,v}^I(x_v),e\in E_3^*,m=(m_1,m_2,m_3)^{\mathrm{T}}\in\{1,2\}^3.$$

这里，E_3^* 表示单位方体的非零顶点，而且

$$\vartheta_{\ell,\mu,v}^I=\begin{cases}\xi_{\mu,v,}^I\ \ell=0,\\ \eta_{\mu,v,}^I\ \ell=1.\end{cases}$$

令 $\varphi_{m;j,k}^{\Delta,I}=:\varphi_{m;j,k}^I\chi_{[0,1]^3}$，则它是区间上尺度函数的张量积，对应的对偶可类似定义．进一步，定义

$$\vec{\varphi}_{m,i;j,k}^{\Delta}=:\varphi_{m;j,k}^{\Delta,I_0\backslash\{i\}}\delta_i,\ \vec{V}_j^{\Delta}=:\mathrm{span}\left\{\vec{\varphi}_{m,i;j,k}^{\Delta}\,\middle|\,m\in\{1,2\}^3,k\in\nabla_j,1\leqslant i\leqslant3\right\}$$

和投影算子

$$\vec{\Lambda}_j^{\Delta,c}=:\Lambda_j^{\Delta,\{2,3\}}\delta_1+\Lambda_j^{\Delta,\{1,3\}}\delta_2+\Lambda_j^{\Delta,\{1,2\}}\delta_3,\ \vec{\Lambda}_j^{\Delta}=:\Lambda_j^{\Delta,\{1\}}\delta_1+\Lambda_j^{\Delta,\{2\}}\delta_2+\Lambda_j^{\Delta,\{3\}}\delta_3.$$

参考文献[6]中给出了下列结论．

引理6.1.1 对光滑函数 $f:[0,1]^3\to\mathbf{R}$，有 $\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_j^{\Delta,I}f=\Lambda_j^{\Delta,I\backslash\{i\}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),i\in I$．

命题6.1.1 设 $\vec{f}\in\vec{C}(\mathrm{curl};[0,1]^3)=\left\{\vec{v}\in(C([0,1]^3))^3\,\middle|\,\mathrm{curl}\vec{v}\in(C([0,1]^3))^3\right\}$，则 $\mathrm{curl}(\vec{\Lambda}_j^{\Delta,c}\vec{f})=$

$\vec{\Lambda}_j^{\Delta}(\mathrm{curl}\,\vec{f})$.

证明 利用引理6.1.1, 可得

$$\vec{\Lambda}_j^{\Delta}(\mathrm{curl}\,\vec{f})=\Lambda_j^{\Delta,\{1\}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\delta_1+\Lambda_j^{\Delta,\{2\}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\delta_2+\Lambda_j^{\Delta,\{3\}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\delta_3$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda_j^{\Delta,\{1,2\}}f_3-\frac{\partial}{\partial x_3}\Lambda_j^{\Delta,\{1,3\}}f_2\right)\delta_1+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\Lambda_j^{\Delta,\{2,3\}}f_1-\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_j^{\Delta,\{1,2\}}f_3\right)\delta_2$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_j^{\Delta,\{1,3\}}f_2-\frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda_j^{\Delta,\{2,3\}}f_1\right)\delta_3,$$

由旋度的定义可得 $\mathrm{curl}\,(\vec{\Lambda}_j^{\Delta,c}\vec{f})=\vec{\Lambda}_j^{\Delta}(\mathrm{curl}\,\vec{f})$.

命题6.1.1是很重要的, 它表明投影算子 $\vec{\Lambda}_j^{\Delta,c}$ 保持无旋度性质. 一般情况下, 向量小波和小波空间定义为

$$\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}^{\Delta}=:\psi_{e,m;\,j,k}^{\Delta,I_0\backslash\{i\}}\delta_i,$$

$$\vec{W}_j^{\Delta}=:\mathrm{span}\left\{\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}^{\Delta}\,\middle|\,e\in E_3^*,m\in\{1,2\}^3,1\leqslant i\leqslant 3,k\in\nabla_j^0\right\}.$$

对$e\in E_3^*$和$m\in\{1,2\}^3$, 定义

$$\vec{\psi}_{e,m;j,k}^{\Delta,c}=:2^{-j}\,\mathrm{grad}\,\psi_{e,m;j,k}^{\Delta,I_0}$$

$$=2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_{e,m;j,k}^{\Delta,I_0}\delta_1+2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_{e,m;j,k}^{\Delta,I_0}\delta_2+2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_{e,m;j,k}^{\Delta,I_0}\delta_3,\ k\in\nabla_j^1.$$

显然, $\mathrm{curl}\,(\vec{\psi}_{e,m;j,k}^{\Delta,c})=\vec{0}$.

为了给出$\vec{W}_j^{\Delta}$的分解, 选取i_e使得$e_{i_e}=1$. 然后, 对$i\in I_0\backslash\{i_e\}$, 令

$$\vec{\psi}_{e,m,i;j,k,}^{\Delta,non}=\psi_{e,m;j,k}^{\Delta,I_0\backslash\{i\}}\delta_i,\ k\in\nabla_j^2.$$

命题6.1.2 向量值函数系$\left\{\vec{\psi}_{e,m;j,k_1}^{\Delta,c},\vec{\psi}_{e,m,i;j,k_2}^{\Delta,non},e\in E_3^*,m\in\{1,2\}^3,i\neq i_e,k_1\in\nabla_j^1,k_2\in\nabla_j^2\right\}$在$\vec{W}_j^{\Delta}$中完备.

证明 只须证明$j=0$的情形. 设$\vec{f}\in\vec{W}_0^{\Delta}$满足

$$(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m;0,k}^{\Delta,c})=(\vec{f},\ \vec{\psi}_{e,m,i;0,k}^{\Delta,non})=0,$$

$e\in E_3^*$, $m\in\{1,\ 2\}^3$, $k\in\nabla_j^1\cup\nabla_j^2$, $1\leqslant i\leqslant 3$, $i\neq i_e$. 这里的内积是指$L^2([0,1]^3)$中的内积. 不失一般性, 假设$i_e=1$. 则由$(\vec{f},\vec{\psi}_{e,m,i;0,k}^{\Delta,non})=0$可得

$$(f_2,\psi_{e,m;0,k}^{\Delta,I_0\backslash\{2\}})=(f_3,\psi_{e,m;0,k}^{\Delta,I_0\backslash\{3\}})=0.$$

利用ψ^I的定义和微分关系, 有

$$\left(f_2,\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_{e,m;0,k}^{\Delta,I_0}\right)=\left(f_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_{e,m;0,k}^{\Delta,I_0}\right)=0.$$

进一步，$(\vec{f},\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;0,k})=0$ 意味着 $\left(f_1,\frac{\partial}{\partial x_1}\psi^{\Delta,I_0}_{e,m;0,k}\right)=0$．因为 $i_e=1$，所以 $(f_1,\psi^{\Delta,I_0\setminus\{1\}}_{e,m;0,k})=0$．最后，可得 $(\vec{f},\vec{\psi}^{\Delta}_{e,m,i;0,k})=0$．由 $\vec{W}^{\Delta}_0$ 可得 $\vec{f}=\vec{0}$．

为了给出双正交分解，定义

$$\tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}=\frac{1}{2}\tilde{\psi}^{\Delta,I_0\setminus\{i_e\}}_{e,m;j,k}\delta_{i_e}. \tag{6-1}$$

设 $I=\{i,i_e,i'\}$，则

$$\operatorname{curl}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k}=\operatorname{curl}\psi^{\Delta,I_0\setminus\{i\}}_{e,m;j,k}\delta_i=2^{j+1}\varepsilon_1\,\psi^{\Delta,I_0\setminus\{i,i_e\}}_{e,m;j,k}\delta_{i'}+\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x_{i'}}\psi^{\Delta,I_0\setminus\{i\}}_{e,m;j,k}\delta_{i_e},$$

其中，$|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=1,\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$．现在，定义

$$\tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k}=:\frac{1}{2^{j+1}}\operatorname{curl}\varepsilon_1\,\tilde{\psi}^{\Delta,I_0\setminus\{i,i_e\}}_{e,m;j,k}\delta_{i'}. \tag{6-2}$$

这里的导数是指分布意义下的导数．下面给出主要结果．

命题6.1.3 向量函数系 $\left\{\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k_1},\ \vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k_2}\,\middle|\, e\in E_3^*, m\in\{1,2\}^3, i\neq i_e,\ j\geqslant j_0,\ k_1\in\nabla_j^1,\ k_2\in\nabla_j^2\right\}$ 是 $L^2([0,1]^3)^3$ 的双正交小波基，对偶由式（6-1）和式（6-2）给出．

证明 根据命题6.1.2，只须证明

（1）$\left\langle\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e',m',i;j',k'},\ \tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}\right\rangle=0$;

（2）$\left\langle\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k},\ \tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,non}_{e',m',i;j',k'}\right\rangle=0$;

（3）$\left\langle\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k},\ \tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,c}_{e',m';j',k'}\right\rangle=\delta_{e,e'}\delta_{m,m'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$;

（4）$\left\langle\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e_1,m_1,i_1;j_1,k_1},\ \tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,non}_{e_2,m_2,i_2;j_2,k_2}\right\rangle=\delta_{e_1,e_2}\delta_{m_1,m_2}\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2}\delta_{k_1,k_2}$.

证明过程完全类似于定理5.1.1．

6.2 向量Besov空间的刻画

设 $0<p,q\leqslant\infty,s>0$，主要考虑如下向量Besov空间

$$\hat{B}^s_q(L^p([0,1]^3))=:\left\{\vec{f}\in(B^s_q(L^p([0,1]^3)))^3\ \middle|\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in B^s_q(L^p([0,1]^3)),\ i=1,2,3;\ j\neq i\right\},$$

对应范数定义为

$$\|\vec{f}\|_{\hat{B}^s_p(L^p([0,1]^3))}=:\sum_{i=1}^3\|f_i\|_{B^s_p(L^p([0,1]^3))}+\sum_{i=1}^3\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant 3\\ j\neq i}}\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|_{B^s_q(L^p([0,1]^3))}.$$

显然，当 $\vec{f}\in\hat{B}^s_q(L^p([0,1]^3))$ 时，$\operatorname{curl}\vec{f}\in(B^s_q(L^p[0,1]^3)))^3$．

引理6.2.1（[6]） 如果 $\phi\in B^\sigma_\infty(L^p(\mathbf{R}^n))$ 具有紧支撑，$0<p,\ q\leqslant\infty,\ 0<s<\sigma$，则

$$\left\|\sum_{k\in\bar{\nabla}_j}\beta_k\phi(2^j\cdot-k)\right\|_{B_q^s(L^p([0,1]^n))}\lesssim 2^{\left(s-\frac{n}{p}\right)j}\|\beta\|_{\ell^p},$$

$$\left\|\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k\in\bar{\nabla}_j}\alpha_{j,k}\phi(2^j\cdot\ k)\right\|_{B_q^s(L^p([0,1]^n))}\lesssim\|\alpha\|_{\ell_{p,q}^s},$$

其中，$\bar{\nabla}_j=:\left\{k\middle|\operatorname{supp}\phi(2^j\cdot-k)\subseteq[0,1]^n\right\}$.

定理6.2.1 如果$0<s<1+\dfrac{1}{p}, 0<p,q\leqslant\infty$，则6.1节中定义的$\vec{\varphi}_{m,i;j,k}^{\Delta}$，$\vec{\psi}_{e,m;j,k}^{\Delta,c}$和$\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}^{\Delta,non}$满足

$$\left\|\sum_{m,i}\sum_{k\in\nabla_{j_0}}\beta_{m,i,k}\vec{\varphi}_{m,i;j_0,k}^{\Delta}+\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{e,m,i\neq i_e}\sum_{k\in\nabla_j^1}\alpha_{e,m;j,k}^{c}\vec{\psi}_{e,m;j,k}^{\Delta,c}\right.$$

$$\left.+\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{e,m}\sum_{k\in\nabla_j^2}\alpha_{e,m,i;j,k}^{non}\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}^{non}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}\lesssim\sum_{m,i}\|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}+\sum_{e,m}\Big(\sum_{i\neq i_e}\|\alpha_{e,m,i}^{non}\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}+\|\alpha_{e,m}^{c}\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}\Big).$$

证明 只须证明下列不等式:

(1) $\left\|\sum_{k\in\nabla_{j_0}}\beta_{m,i,k}\vec{\varphi}_{m,i;j_0,k}^{\Delta}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}\lesssim\|\beta_{m,i}\|_{\ell^p}$;

(2) $\left\|\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k\in\nabla_j^1}\alpha_{e,m;j,k}^{c}\vec{\psi}_{e,m;j,k}^{\Delta,c}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3)}\lesssim\|\alpha_{e,m}^{c}\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}$;

(3) $\left\|\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k\in\nabla_j^2}\alpha_{e,m,i;j,k}^{non}\vec{\psi}_{e,m,i;j,k}^{non}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3)}\lesssim\|\alpha_{e,m,i}^{non}\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}(i\neq i_e)$.

证明过程完全类似于定理5.2.1.

令$\sigma_{j,k}=2^{-j}([0,1]^3+k)$, $k\in(\mathbf{Z}_j^2)^3$. 边界情形定义为：当只有一个$k_i=2^j(1\leqslant i\leqslant 3)$时，$\sigma_{j,k}$定义为用$[2^{j-1},2^j]$替换$2^{-j}([k_1,k_1+1]\otimes[k_2,k_2+1]\otimes[k_3,k_3+1])$的第$i$个位置；当$k_i=k_{i'}=2^j, i,i'\in\{1,2,3\}$, $\sigma_{j,k}$定义为用$[2^{j-1},2^j]$替换第i和i'个位置；最后，$\sigma_{j,(2^j,2^j,2^j)}=:2^{-j}\left(\left[2^{j-1},2^j\right]\otimes\left[2^{j-1},2^j\right]\otimes\left[2^{j-1},2^j\right]\right)$.

引理6.2.2（[6]） 令$\dfrac{n}{p}-\dfrac{n}{\tau}+\mu<s<d, s>0, \mu\in N_0, 0<p,q\leqslant\infty, 1\leqslant\tau\leqslant\infty, j_0\in N_0$. 则有

$$\left\|\left(2^{j(s-\frac{n}{p}+\frac{n}{\tau}-\mu)}\left\|\left(E_d\left(f,W_\tau^\mu\left(\sigma_{j,k}\right)\right)\right)_{k\in\mathbf{Z}^n}\right\|_{\ell^p}\right)_{j\geqslant j_0}\right\|_{\ell^q}\lesssim|f|_{B_q^s(L^p([0,1]^n))}.$$

下列引理容易证明.

引理6.2.3 下列关系成立:

$$\left\langle f,\tilde{\eta}_{1;j,k}^{\Delta,+}\right\rangle=f\left(2^{-j}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{1}{2}f(2^{-j}k)-\frac{1}{2}f(2^{-j}(k+1))$$
$$-\frac{1}{8}\cdot 2^{-j}f'(2^{-j}k)+\frac{1}{8}\cdot 2^{-j}f'(2^{-j}(k+1));$$
$$\left\langle f,\tilde{\eta}_{2;j,k}^{\Delta,+}\right\rangle=2^{-(j+1)}f'\left(2^{-j}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{3}{4}f(2^{-j}(k+1))$$
$$+\frac{3}{4}f(2^{-j}k)+\frac{1}{4}\cdot 2^{-(j+1)}[f'(2^{-j}k)+f'(2^{-j}(k+1))];$$
$$\left\langle f,\tilde{\eta}_{1;j,k}^{\Delta,}\right\rangle=2^{j}\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+\frac{1}{2})}f(t)\,\mathrm{d}t-2^{j}\int_{2^{-j}(k+\frac{1}{2})}^{2^{-j}(k+1)}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{4}f(2^{-j}k)+\frac{1}{4}f(2^{-j}(k+1))\ ;$$
$$\left\langle f,\tilde{\eta}_{2;j,k}^{\Delta,-}\right\rangle=-\frac{3}{2}\cdot 2^{j}\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}f(2^{-j}k)+\frac{1}{4}f(2^{-j}(k+1))+f\left(2^{-j}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right).$$

定理6.2.2 令$1+\dfrac{3}{p}<s<3, 0<p,q\leqslant\infty$. 则$\beta_{m,i}=\left(\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\varphi}}_{m,i;j_0,k}^{\Delta}\right\rangle\right)_{k\in\nabla_{j_0}}$,

$$\alpha_{e,m}^{c}=\left(\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\psi}}_{e,m;j,k}^{\Delta,c}\right\rangle\right)_{j\geqslant j_0,k\in\nabla_j^1}\ 和\ \alpha_{e,m,i}^{non}=\left(\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\psi}}_{e,m,i;j,k}^{\Delta,non}\right\rangle\right)_{j\geqslant j_0,k\in\nabla_j^2},j_0\geqslant 1,i\neq i_e$$

满足估计

$$\sum_{m,i}\left\|\beta_{m,i}\right\|_{\ell^p}+\sum_{e,m}\left(\sum_{i\neq i_e}\left\|\alpha_{e,m,i}^{non}\right\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}+\left\|\alpha_{e,m}^{c}\right\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}\right)\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}.$$

证明 只须证明下列不等式:

(1) $\left\|\beta_{m,i}\right\|_{\ell^p}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}$;

(2) $\left\|\alpha_{e,m,i}^{non}\right\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}$;

(3) $\left\|\alpha_{e,m}^{c}\right\|_{\ell_{p,q}^{s+1}}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}$.

注意到$\beta_{m,i;k}=\left\langle\vec{f},\vec{\tilde{\varphi}}_{m,i;j_0,k}^{\Delta}\right\rangle=\left\langle f_i,\tilde{\varphi}_{m;j_0,k}^{\Delta,I_0\setminus\{i\}}\right\rangle$. 不失一般性, 假设$i=1$, 首先证明

$$\left\|\beta_{m,1}\right\|_{\ell^p}=\left\|\left(\left\langle f_1,\tilde{\varphi}_{m;j_0,k}^{\Delta,\{2,3\}}\right\rangle\right)_{k\in\nabla'_{j_0}}\right\|_{\ell^p}\lesssim\left\|\vec{f}\right\|_{\hat{B}_q^s(L^p([0,1]^3))}.$$

由嵌套性质, $B_q^s(L^p(D))\subseteq W_\tau^\mu(D), s>\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\tau}+\mu$. 而且

$$\|f\|_{W_\tau^\mu(D)}\lesssim\|f\|_{B_q^s(L^p(D))}.\tag{6-3}$$

当$m_2=m_3=1$时, $\left|\left\langle f_1,\tilde{\varphi}_{m;j_0,k}^{\Delta,\{2,3\}}\right\rangle\right|\leqslant\begin{cases}\|f_1\|_{L^\infty(\sigma_{j_0,k-\delta_1})}, & m_1=1,\\ \|f_1\|_{L^\infty(\sigma_{j_0,k})}, & m_1=2.\end{cases}$

进一步, 利用式(6-3)可得

$$\left\|\beta_{m,1}\right\|_{\ell^p}\leqslant\begin{cases}\left(\sum\limits_{k\in\nabla'_{j_0}}\|f_1\|^p_{L^\infty(\sigma_{j_0,k-\delta_1})}\right)^{\frac{1}{p}}, & m_1=1\\ \left(\sum\limits_{k\in\nabla'_{j_0}}\|f_1\|^p_{L^\infty(\sigma_{j_0,k})}\right)^{\frac{1}{p}}, & m_1=2\end{cases}\lesssim\|f_1\|_{B^s_q(L^p([0,1]^3))}\lesssim\|\vec{f}\|_{\vec{B}^s_q(L^p([0,1]^3))}.$$

当$m_3=2$（类似地，$m_2=2$），可得

$$\left|\left\langle f_1,\tilde{\varphi}^{\Delta,\{2,3\}}_{m,j_0,k}\right\rangle\right|=2^{-j_0}\left|\left\langle\frac{\partial f_1}{\partial x_3},\tilde{\varphi}^{\Delta,\{2\}}_{m,j_0,k}\right\rangle\right|\leqslant\begin{cases}2^{-j_0}\left\|\dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\right\|_{W^1_\infty(\sigma_{j_0,k-\delta_1})}, & m_1=1,\\ 2^{-j_0}\left\|\dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\right\|_{W^1_\infty(\sigma_{j_0,k})}, & m_1=2.\end{cases}$$

注意到$1+\dfrac{1}{p}<s<3$，同样的讨论可得（1）.

对$h\in B^s_q(L^p([0,1]^3))$，首先声明只有下列两种情形:

（1）$\left|\left\langle h,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\lesssim 2^{-j}E_3(h,W^1_\infty(\sigma_{j,k}))$ 或 $2^{-j}E_3(h,W^1_\infty(\sigma_{j,k-\delta_{i'}}))$;

（2）$\left|\left\langle h,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\lesssim E_3(h,L^\infty(\sigma_{j,k}))$ 或 $E_3(h,L^\infty(\sigma_{j,k-\delta_{i'}}))$.

事实上，由于对偶小波具有消失矩，即

$$\tilde{\eta}^{\ulcorner}_{m;j,k}(P_1)=0,\ P_1\in\Pi_2;\ \tilde{\eta}_{m,j,k}(P_2)=0,\ P_2\in\Pi_2.$$

因此，对每一个$P\in\Pi_2$，$\left\langle h,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle=\left\langle h-P,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle$. 如果$e_{i'}=1$或者$e_{i'}=0$且$m_{i'}=2$，微分关系意味着

$$\left|\left\langle h,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\lesssim 2^{-j}\left|\left\langle\frac{\partial}{\partial x_{i'}}(h-P),\ \tilde{\psi}^{\Delta,\varnothing}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\lesssim\begin{cases}2^{-j}\|h-P\|_{W^1_\infty(\sigma_{j,k-\delta_{i'}})}, & e_{i'}=0,\ m_{i'}=1;\\ 2^{-j}\|h-P\|_{W^1_\infty(\sigma_{j,k})}, & \text{其他}.\end{cases}$$

进一步，由$E_3(h,W^1_\infty(D))$的定义可得（1）. 如果$e_{i'}=0$且$m_{i'}=1$，则

$$\left|\left\langle h,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|=\left|\left\langle h-P,\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\lesssim\begin{cases}\|h-P\|_{L^\infty(\sigma_{j,k-\delta_{i'}})}, & e_{i'}=0,\ m_{i'}=1,\\ \|h-P\|_{L^\infty(\sigma_{j,k})}, & \text{其他}.\end{cases}$$

类似可得（2）.

下面开始估计$\alpha^{non}_{e,m,i;j,k}$和$\alpha^{c}_{e,m;j,k}$. 由$\tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,non}_{e,m,i}$的定义知

$$\left|\alpha^{non}_{e,m,i;j,k}\right|=:\left|\left\langle\vec{f},\tilde{\vec{\psi}}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k}\right\rangle\right|=2^{-j-1}\left|\left\langle\operatorname{curl}\vec{f},\tilde{\psi}^{\Delta,I_0\setminus\{i,i_e\}}_{e,m;j,k}\delta_{i'}\right\rangle\right|$$

$$=2^{-j-1}\left|\left\langle\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}}-\frac{\partial f_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\leqslant 2^{-j-1}\left(\left|\left\langle\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}},\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|+\left|\left\langle\frac{\partial f_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\right).$$

定义$\beta^{non}_{e,m,i;j,k}=:2^{-j-1}\left|\left\langle\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}},\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|$和$\gamma^{non}_{e,m,i;j,k}=:2^{-j-1}\left|\left\langle\dfrac{\partial f_{i_e}}{\partial x_i},\tilde{\psi}^{\Delta,\{i'\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|$. 下面只须证明

$$\left\|\beta^{non}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}} \lesssim \left\|\vec{f}\right\|_{\dot{B}^s_q(L^p([0,1]^3))} \text{ 和 } \left\|\gamma^{non}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}} \lesssim \left\|\vec{f}\right\|_{\dot{B}^s_q(L^p([0,1]^3))}.$$

在声明中令 $h =: \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}}$，则

$$\beta^{non}_{e,m,i;j,k} \lesssim 2^{2j} E_3(h, W^1_\infty(\sigma_{j,k})),\ 2^{-2j} E_3(h, W^1_\infty(\sigma_{j,k-\delta_i}))$$

或者

$$\beta^{non}_{e,m,i;j,k} \lesssim 2^{-j} E_3(h, L^\infty(\sigma_{j,k})),\ 2^{-j} E_3(h, L^\infty(\sigma_{j,k-\delta_i})).$$

由 $\|\alpha\|_{\ell^{s+1}_{p,q}} =: \left\|\left(2^{j(s+1-\frac{n}{p})}\left\|\alpha_j\right\|_{\ell^p}\right)\right\|_{\ell^q}$ 和引理6.2.3，可得

$$\left\|\beta^{non}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}} \lesssim \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_e}}\right|_{B^s_q(L^p([0,1]^3))} \lesssim \left\|\vec{f}\right\|_{\dot{B}^s_q(L^p([0,1]^3))}.$$

类似地，$\left\|\gamma^{non}_{e,m,i}\right\|_{\ell^{s+1}_{p,q}} \lesssim \left\|\vec{f}\right\|_{\dot{B}^s_q(L^p([0,1]^3))}$ 成立．（2）得证．

最后，估计 $\alpha^c_{e,m;j,k} =: \left\langle \vec{f}, \vec{\tilde{\psi}}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}\right\rangle = \dfrac{1}{2}\left\langle f_{i_e}, \tilde{\psi}^{\Delta, I_0\setminus\{i_e\}}_{e,m;j,k}\right\rangle$．不失一般性，假设 $i_e=1$，则 $\alpha^c_{e,m;j,k} = \dfrac{1}{2}\left\langle f_1, \tilde{\psi}^{\Delta,\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle$．注意到 $\dfrac{d}{dx}\tilde{\eta}^-_m = -2\tilde{\eta}^+_m$ 和 $\dfrac{d}{dx}\tilde{\xi}_2 = -\tilde{\xi}^+_2$，当 $e_2=1$ 或 $e_3=1$ 或 $m_2=2$ 或 $m_3=2$ 时，有

$$\left|\alpha^c_{e,m;j,k}\right| \lesssim 2^{-j}\left|\left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \tilde{\psi}^{\Delta,\{l\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|,\ i,l\in\{2,3\}, i\neq l.$$

进一步，可得

$$\left|\alpha^c_{e,m;j,k}\right| \lesssim 2^{2j} E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, W^1_\infty(\sigma_{j,k})\right) \text{ 或 } 2^{-j} E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, L^\infty(\sigma_{j,k})\right).$$

在这些情形下，（3）得证．下面证明 $e_2=e_3=0$ 和 $m_2=m_3=1$ 的情形．

对每一个 $P\in\prod_2$，令 $g(x_1,\cdot,x_3)$ 是 $P(x_1,\cdot,x_3)$ 的一个原函数，即

$$g(x_1,x_2,x_3) =: \int P(x_1,x_2,x_3)\,dx_2,$$

而且，$g\Big|_{x_2=2^{-j}(k_2-1)} =: f_1\Big|_{x_2=2^{-j}(k_2-1)}, k_2=1,2,\cdots,2^j$；$g\Big|_{x_2=2^{-j}} =: f_1\Big|_{x_2=2^{-j}}, k_2=0$．因为 $e_1=1$，并且 $\tilde{\eta}^-_m$ 具有二阶消失矩，所以

$$\left|\left\langle f_1-g, \tilde{\psi}^{\Delta,\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right| = \begin{cases} \left|-2^{j}\left\langle f_1-g, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\psi}^{\Delta,\{3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle + \left\langle f_1-g, \tilde{\psi}^{\Delta,\{2,3\}}_{e,m;j,k-\delta_2}\right\rangle\right|, & k_2=1,2,\cdots,2^j, \\ \left|2^{-j}\left\langle f_1-g, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\psi}^{\Delta,\{3\}}_{e,m;j,k+\delta_2}\right\rangle + \left\langle f_1-g, \tilde{\psi}^{\Delta,\{2,3\}}_{e,m;j,k+\delta_2}\right\rangle\right|, & k_2=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left|-2^{j}\left\langle f_1-g, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\psi}^{\Delta,\{3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|, & k_2=1,2,\cdots,2^j, \\ \left|2^{j}\left\langle f_1-g, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\psi}^{\Delta,\{3\}}_{e,m;j,k+\delta_2}\right\rangle\right|, & k_2=0 \end{cases}$$

$$\lesssim\begin{cases}2^{j}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_{L^\infty(\sigma_{j,k-\delta_2})}, k_2=1,2,\cdots,2^j,\\ 2^{-j}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_{L^\infty(\sigma_{j,k})}, \quad k_2=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2^{j}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-P\right\|_{L^\infty(\sigma_{j,k-\delta_2})}, \quad k_2=1,2,\cdots,2^j,\\ 2^{j}\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-P\right\|_{L^\infty(\sigma_{j,k})}, \quad k_2=0.\end{cases}$$

因此，可得

$$\left|\left\langle f_1,\tilde{\psi}^{\Delta,\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|=\left|\left\langle f_1-g,\tilde{\psi}^{\Delta,\{2,3\}}_{e,m;j,k}\right\rangle\right|\lesssim\begin{cases}2^{j}E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2},L^\infty(\sigma_{j,k-\delta_2})\right), k_2=1,2,\cdots,2^j,\\ 2^{-j}E_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2},L^\infty(\sigma_{j,k})\right), \quad k_2=0.\end{cases}$$

由引理6.2.2可得结论.

6.3　无旋度小波的稳定性

下列引理是泛函分析中的经典结论.

引理6.3.1　令X是一个Banach空间，$x_1,x_2,\cdots,x_n\subseteq X$线性无关．则存在一个常数$C>0$使得对任意的标量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，有

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n\|\geqslant C(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|).$$

引理6.3.2（[6]）　令X是一个Banach空间，$f_{i1},f_{i2},\cdots,f_{in_i}\subseteq X$对每一个$i=1,2,\cdots m$线性无关,则张量积$\left\{f_{1j_1}(x_1)\,f_{2j_2}(x_2)\cdots f_{mj_m}(x_m)\right\}_{j_i\in\{1,2,\cdots,n_i\},\ i=1,2,\cdots,m}$也是线性无关的.

定理6.3.1　函数系$\left\{2^{\frac{3j}{2}}\tilde{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k},2^{\frac{3j}{2}}\tilde{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k'}\,\middle|\,e\in E_3^*,m\in\{1,2\}^3,k\in\nabla_j^1,k'\in\nabla_j^2,\ i\neq i_e\right\}$构成$\vec{W}_j^\Delta$的Riesz基，并且Riesz界不依赖于$j$.

证明　由命题6.1.3，只须证明函数系的稳定性．令

$$\vec{\omega}=:\sum_{e,m,k}d^c_{e,m;j,k}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}+\sum_{e,m,k}\sum_{i\neq i_e}d^{non}_{e,m,i;j,k}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k}\in\vec{W}_j^\Delta.$$

当$s>0$时，$\|\vec{\omega}\|_{L^2([0,1]^3)^3}\leqslant\|\vec{\omega}\|_{H^s([0,1]^3)^3}$．因为$H^s([0,1]^3)=B_2^s(L^2([0,1]^3))$，所以

$$\|\vec{\omega}\|_{L^2([0,1]^3)^3}\leqslant\|\vec{\omega}\|_{\hat{B}_2^s(L^2([0,1]^3)^3)}.$$

进一步，由定理6.2.1可得

$$\|\vec{\omega}\|_{L^2([0,1]^3)^3}\lesssim\left(\sum_{e,m,k}\sum_{i\neq i_e}\left|d^{non}_{e,m,i;j,k}\right|^2+\sum_{e,m,k}\left|d^c_{e,m;j,k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面只须证明下界. 令$\sigma_{j,k}=:2^{-j}([0,1]^3+k), k\in(\mathbf{Z}_j^2)^3$, 则$\bigcup_{k\in(\mathbf{Z}_j^2)^3}\sigma_{j,k}=[0,1]^3$.

作为例子, 取$e=(0,0,1)$和$m=(2,1,1)$,

$$\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}=(\xi^{\Delta,-}_{2;j,k_1}\xi^{\Delta,+}_{1;j,k_2}\eta^{\Delta,+}_{1;j,k_3},\ \xi^{\Delta,+}_{2;j,k_1}(\xi^{\Delta,}_{1;j,k_2}-\xi^{\Delta,}_{1;j,k_2+1})\eta^{\Delta,+}_{1;j,k_3},\ \xi^{\Delta,+}_{2;j,k_1}\xi^{\Delta,+}_{1;j,k_2}\eta^{\Delta,-}_{1;j,k_3}),$$

$$\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,1;j,k}=(\xi^{\Delta,-}_{2;j,k_1}\xi^{\Delta,+}_{1;j,k_2}\eta^{\Delta,+}_{1;j,k_3},0,0),$$

$$\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,2;j,k}=(0,\xi^{\Delta,+}_{2;j,k_1}\xi^{\Delta,-}_{1;j,k_2}\eta^{\Delta,+}_{1;j,k_3},0).$$

对每一个固定的$k\in(\mathbf{Z}_j^2)^3$, 由引理6.3.1和6.3.2可得

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_{j,k}}|\vec{\omega}|^2dx=\int_{\sigma_{j,k}}\Bigg|&d^c_{e,m;j,k}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}+\sum_{i=1}^2 d^c_{e,m;j,k+\delta_i}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}+d^c_{e,m;j,k+\delta_1+\delta_2}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k+\delta_1+\delta_2}\\&+d^{non}_{e,m,1;j,k}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,1;j,k}+d^{non}_{e,m,1;j,k+\delta_1}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,1;j,k+\delta_1}+\sum_{\mu=1}^2(d^{non}_{e,m,\mu;j,k+\delta_2}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,\mu;j,k+\delta_2}\\&+d^{non}_{e,m,\mu;j,k+\delta_1+\delta_2}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,\mu;j,k+\delta_1+\delta_2})\\&+\sum_{e\neq(0,0,1),\ m\neq(2,1,1),\ i\neq i_e,\ k'}(d^c_{e,m;j,k'}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k'}+d^{non}_{e,m,i;j,k'}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k'})\Bigg|^2dx\\ \geqslant C\Bigg(&\left|d^c_{e,m;j,k}\right|^2+\sum_{i-1}^2\left|d^c_{e,m;j,k+\delta_i}\right|^2+\left|d^c_{e,m;j,k+\delta_1+\delta_2}\right|^2\\&+\left|d^{non}_{e,m,1;j,k}\right|^2+\left|d^{non}_{e,m,1;j,k+\delta_1}\right|^2+\sum_{\mu=1}^2\left(\left|d^{non}_{e,m,\mu;j,k+\delta_2}\right|^2+\left|d^{non}_{e,m,\mu;j,k+\delta_1+\delta_2}\right|^2\right)\\&+\sum_{e\neq(0,0,1),m\neq(2,1,1),i\neq i_e,k'}\left(\left|d^c_{e,m;j,k'}\right|^2+\left|d^{non}_{e,m,i;j,k'}\right|^2\right)\Bigg).\end{aligned}$$

最后, 可得

$$\|\vec{\omega}\|^2_{L^2([0,1]^3)^3}=\sum_{k\in(\mathbf{Z}_j^2)^3}\int_{\sigma_{j,k}}|\vec{\omega}|^2dx\gtrsim C\left(\sum_{e,m,k}\sum_{i\neq i_e}\left|d^{non}_{e,m,i;j,k}\right|^2+\sum_{e,m,k}\left|d^c_{e,m;j,k}\right|^2\right).$$

推论6.3.1 函数系$\left\{2^{\frac{3j}{2}}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}, e\in E_3^*, m\in\{1,2\}^3, k\in\nabla_j^1\right\}$是$\vec{W}_j^{\Delta,c}=:\mathrm{span}\left\{2^{\frac{3j}{2}}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}\middle|e\in E_3^*, m\in\{1,2\}^3, k\in\nabla_j^1\right\}$中的Riesz基, 且Riesz界不依赖于$j$.

证明 注意到$\vec{\omega}=\sum_{e,m,k}d^c_{e,m;j,k}\vec{\psi}^{\Delta,c}_{e,m;j,k}+\sum_{e,m,k}\sum_{i\neq i_e}d^{non}_{e,m,i;j,k}\vec{\psi}^{\Delta,non}_{e,m,i;j,k}\in\vec{W}_j^{\Delta}$和$\mathrm{curl}(\mathrm{grad} f)=\vec{0}$. 因为, $\vec{\omega}$是无旋度的当且仅当$d^{non}_{e,m,i;j,k}=0$, 所以结论成立.

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

第 8 章　方体上的各向异性无旋度小波

本章主要利用 7.1 节中选择的区间小波构造单位方体$[0,1]^3$上的各向异性无旋度小波.

8.1　$[0,1]^3$上的各向异性无旋度小波

令$\square=:[0,1]^3$. 进一步, 定义边界

$$\Gamma_k=\bigcup_{m=1,\,m\neq k}^{3}[0,1]^{m-1}\times\{0\}\times[0,1]^{3-m},\quad \tilde{\Gamma}_k=[0,1]^{k-1}\times\{1\}\times[0,1]^{3-k}$$

和函数空间

$$H^s_{0,\Sigma}(\square)=:\begin{cases}H^s(\square)\cap H^1_{0,\ \Sigma}(\square),\ s\geqslant 1,\\(L^2(\square),H^1_{0,\ \Sigma}(\square))_s,\ s\in[0,1].\end{cases}$$

具体地, $\Gamma_1=[0,1]\times\{0\}\times[0,1]\cup[0,1]\times[0,1]\times\{0\}$,

$\Gamma_2=\{0\}\times[0,1]\times[0,1]\cup[0,1]\times[0,1]\times\{0\}$,

$\Gamma_3=\{0\}\times[0,1]\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0\}\times[0,1]$.

$\tilde{\Gamma}_1=\{1\}\times[0,1]\times[0,1]$, $\tilde{\Gamma}_2=[0,1]\times\{1\}\times[0,1]$, $\tilde{\Gamma}_3=[0,1]\times[0,1]\times\{1\}$.

引理 8.1.1　(1) 下列刻画成立:

$$H^s_{0,\Gamma_1}(\square)=H^s\otimes L^2\otimes L^2\cap L^2\otimes H^s_{0,\{0\}}\otimes L^2\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s_{0,\{0\}},$$

$$H^s_{0,\Gamma_2}(\square)=H^s_{0,\{0\}}\otimes L^2\otimes L^2\cap L^2\otimes H^s\otimes L^2\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s_{0,\{0\}},$$

$$H^s_{0,\Gamma_3}(\square)=H^s_{0,\{0\}}\otimes L^2\otimes L^2\cap L^2\otimes H^s_{0,\{0\}}\otimes L^2\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s,$$

$$H^s_{0,\tilde{\Gamma}_1}(\square)=H^s_{0,\{1\}}\otimes L^2\otimes L^2\cap L^2\otimes H^s\otimes L^2\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s,$$

$$H^s_{0,\tilde{\Gamma}_2}(\square)=H^s\otimes L^2\otimes L^2\cap L^2\otimes H^s_{0,\{1\}}\otimes L^2\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s,$$

$$H^s_{0,\tilde{\Gamma}_3}(\square)=H^s\otimes L^2\otimes L^2\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s\cap L^2\otimes L^2\otimes H^s_{0,\{1\}}.$$

(2) 设$0\leqslant s<\gamma$, $0\leqslant\tilde{s}<\tilde{\gamma}-1$, 函数族

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{-\frac{s}{2}}\psi_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^3\right\},$$

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{-\frac{s}{2}}\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_1}|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^3\right\},$$

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{\frac{s}{2}}\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi_{\lambda_3}:\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^3\right\},$$

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{\frac{\tilde{s}}{2}}\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}^{-}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\Big|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^3\right\},$$

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{-\frac{\tilde{s}}{2}}\tilde{\psi}^{-}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}^{-}_{\lambda_3}\Big|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^3\right\},$$

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{\frac{\tilde{s}}{2}}\tilde{\psi}^{-}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\Big|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^3\right\}$$

分别构成$H^{s}_{0,\Gamma_k}(\square)(k=1, 2, 3)$和$H^{\tilde{s}}_{0,\tilde{\Gamma}_k}(\square)(k=1, 2, 3)$的 Riesz 基．当$s=\tilde{s}=0$时，对应函数族是双正交的．

对$\lambda\in\vec{\nabla}$，定义向量小波

$$\underline{\psi}^{(1)}_{\lambda}=:\psi_{\lambda_1}\otimes\psi^{+}_{\lambda_2}\otimes\psi_{\lambda_3}\delta_1,\quad \underline{\psi}^{(2)}_{\lambda}=:\psi^{+}_{\lambda_1}\otimes\psi_{\lambda_2}\otimes\psi^{+}_{\lambda_3}\delta_2,\quad \underline{\psi}^{(3)}_{\lambda}=:\psi^{+}_{\lambda_1}\otimes\psi^{+}_{\lambda_2}\otimes\psi_{\lambda_3}\delta_3;$$

$$\underline{\tilde{\psi}}^{(1)}_{\lambda}=:\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}^{-}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\delta_1,\quad \underline{\tilde{\psi}}^{(2)}_{\lambda}=:\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\delta_2,\quad \underline{\tilde{\psi}}^{(3)}_{\lambda}=:\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}^{-}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\delta_3.$$

则有下列结论．

命题 8.1.1　设$0\leqslant s<\gamma$，$0\leqslant\tilde{s}<\tilde{\gamma}-1$，函数族

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{\frac{s}{2}}\underline{\psi}^{(k)}_{\lambda}\Big|k=1,2,3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\},\quad \left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{-\frac{\tilde{s}}{2}}\underline{\tilde{\psi}}^{(k)}_{\lambda}\Big|k=1,2,3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$$

分别是$H^{s}_{0,\Gamma_1}(\square)\times H^{s}_{0,\Gamma_2}(\square)\times H^{s}_{0,\Gamma_3}(\square)$和$H^{\tilde{s}}_{0,\tilde{\Gamma}_1}(\square)\times H^{\tilde{s}}_{0,\tilde{\Gamma}_2}(\square)\times H^{\tilde{s}}_{0,\tilde{\Gamma}_3}(\square)$的 Riesz 基．当$s=\tilde{s}=0$时，对应的函数族是双正交的．

下面作正交基变换．令A^{λ}是一个正交矩阵，它的第一行为

$$A^{\lambda}_1=:\frac{1}{\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}}(2^{|\lambda_1|},2^{|\lambda_2|},2^{|\lambda_3|})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=:\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}.\tag{8-1}$$

一个简单的例子是

$$A^{\lambda}=:\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_2 & 1-\dfrac{\alpha_2^2}{1-\alpha_1} & -\dfrac{\alpha_2\alpha_3}{1-\alpha_1}\\ \alpha_3 & -\dfrac{\alpha_2\alpha_3}{1-\alpha_1} & 1-\dfrac{\alpha_3^2}{1-\alpha_1}\end{pmatrix},\tag{8-2}$$

它是著名的 Householder 变换

$$A^{\lambda}=I_3-\frac{2(\vec{\alpha}-\vec{e}_1)(\vec{\alpha}-\vec{e}_1)^{\mathrm{T}}}{(\vec{\alpha}-\vec{e}_1)^{\mathrm{T}}(\vec{\alpha}-\vec{e}_1)}.$$

定义

$$\begin{pmatrix}\psi^{(1)}_{\lambda}\\ \psi^{(2)}_{\lambda}\\ \psi^{(3)}_{\lambda}\end{pmatrix}=:A^{\lambda}\begin{pmatrix}\underline{\psi}^{(1)}_{\lambda}\\ \underline{\psi}^{(2)}_{\lambda}\\ \underline{\psi}^{(3)}_{\lambda}\end{pmatrix}\quad 和\quad \begin{pmatrix}\tilde{\psi}^{(1)}_{\lambda}\\ \tilde{\psi}^{(2)}_{\lambda}\\ \tilde{\psi}^{(3)}_{\lambda}\end{pmatrix}=:A^{\lambda}\begin{pmatrix}\underline{\tilde{\psi}}^{(1)}_{\lambda}\\ \underline{\tilde{\psi}}^{(2)}_{\lambda}\\ \underline{\tilde{\psi}}^{(2)}_{\lambda}\end{pmatrix}.$$

令

$$\Psi=:\left\{\psi_{\lambda}^{(k)} \middle| k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\} \text{ 和 } \tilde{\Psi}=:\left\{\tilde{\psi}_{\lambda}^{(k)} \middle| k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}.$$

利用正交变换的性质可得如下命题.

命题 8.1.2 设$0\leqslant s<\gamma$, $0\leqslant\tilde{s}<\tilde{\gamma}-1$, 函数族

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{-\frac{s}{2}}\psi_{\lambda}^{(k)} \middle| k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\},$$

$$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{-\frac{\tilde{s}}{2}}\tilde{\psi}_{\lambda}^{(k)} \middle| k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$$

分别构成$H_{0,\Gamma_1}^{s}(\square)\times H_{0,\Gamma_2}^{s}(\square)\times H_{0,\Gamma_3}^{s}(\square)$和$H_{0,\tilde{\Gamma}_1}^{\tilde{s}}(\square)\times H_{0,\tilde{\Gamma}_2}^{\tilde{s}}(\square)\times H_{0,\tilde{\Gamma}_3}^{\tilde{s}}(\square)$的 Riesz 基. 当$s=\tilde{s}=0$时, 对应的函数族是双正交的.

令$\Gamma=:\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$和$\tilde{\Gamma}=:\partial\square\backslash\Gamma$, 定义函数空间

$$H(\mathrm{curl};\ \square)=:\left\{\vec{u}\in L^2(\square)^3 \middle| \mathrm{curl}\vec{u}\in L^2(\square)^3\right\},$$

$$H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\square)=:\left\{\vec{u}\in H(\mathrm{curl};\ \square) \middle| \text{在边界}\Gamma\text{上}\ \vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}\right\},$$

$$H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\square)=:\left\{\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\ \square) \middle| \mathrm{curl}\vec{u}=\vec{0}\right\}.$$

注记 8.1.1 $\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$在$\Gamma$上成立当且仅当$u_k=0$在$\Gamma_k(k=1,2,3)$上成立. 特别地, 有

$$H_{0,\Gamma_1}^{1}(\square)\times H_{0,\Gamma_2}^{1}(\square)\times H_{0,\Gamma_3}^{1}(\square)=\left\{\vec{u}\in H^1(\square)^3 \middle| \text{在边界}\Gamma\text{上}\ \vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}\right\}.$$

为了后面使用, 定义

$$\underline{\sigma}_{\lambda}^{(k)}=:\begin{cases}\psi_{\lambda_1}^{+}\otimes\psi_{\lambda_2}\otimes\psi_{\lambda_3}\delta_1, & k=1,\\ \psi_{\lambda_1}\otimes\psi_{\lambda_2}^{+}\otimes\psi_{\lambda_3}\delta_2, & k=2,\\ \psi_{\lambda_1}\otimes\psi_{\lambda_2}\otimes\psi_{\lambda_3}^{+}\delta_3, & k=3;\end{cases}\qquad \underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(k)}=:\begin{cases}\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\delta_1, & k=1,\\ \tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\delta_2, & k=2,\\ \tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}^{-}\delta_3, & k=3.\end{cases}$$

引理 8.1.2 $\Psi\subset H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\square)$. 而且

$$\mathrm{curl}\,\psi_{\lambda}^{(k)}=\begin{cases}\vec{0}, & k=1,\\ (A_{23}2^{|\lambda_2|}-A_{22}2^{|\lambda_3|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+(A_{21}2^{|\lambda_3|}-A_{23}2^{|\lambda_1|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}+(A_{22}2^{|\lambda_1|}-A_{21}2^{|\lambda_2|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)}, & k=2,\\ (A_{33}2^{|\lambda_2|}-A_{32}2^{|\lambda_3|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+(A_{31}2^{|\lambda_3|}-A_{33}2^{|\lambda_1|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}+(A_{32}2^{|\lambda_1|}-A_{31}2^{|\lambda_2|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)}, & k=3.\end{cases}$$

设a,b,c是方程

$$\begin{cases}-b2^{|\lambda_3|}+c2^{|\lambda_2|}=A_{21},\\ a2^{|\lambda_3|}-c2^{|\lambda_1|}=A_{22},\\ b2^{|\lambda_1|}-a2^{|\lambda_2|}=A_{23}\end{cases}\tag{8-3}$$

的解, 则对任意的$\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\ \square)$, 有

$$\left\langle\vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(2)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}=\left\langle\mathrm{curl}\vec{u},\ a\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(3)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}.$$

类似地, 如果a,b,c是方程

$$\begin{cases} -b2^{|\lambda_3|}+c2^{|\lambda_2|}=A_{31}, \\ a2^{|\lambda_3|}-c2^{\lambda_1}=A_{32}, \\ b2^{|\lambda_1|}-a2^{|\lambda_2|}=A_{33} \end{cases} \tag{8-4}$$

的解，则有

$$\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(3)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}=\left\langle \mathrm{curl}\vec{u},\ a\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(3)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}.$$

证明 由于 $\left\{\psi_{\lambda}^{+}|\lambda\in\nabla\right\}\subseteq H_{0,\{0\}}^{1}(I)$，故 $\underline{\psi}_{\lambda}^{(k)}\in H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\square)$. 因此，$\Psi\subset H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\square)$. 进一步，根据旋度算子的定义可得

$$\mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(1)}=2^{|\lambda_3|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}-2^{|\lambda_2|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)},$$
$$\mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(2)}=-2^{|\lambda_3|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+2^{|\lambda_1|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)},$$
$$\mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(3)}=2^{|\lambda_2|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}-2^{\lambda_1|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}.$$

注意到 $\mathrm{curl}\,\psi_{\lambda}^{(k)}=\sum_{m=1}^{3}A_{km}^{\lambda}\ \mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(m)}$. 令 $\Delta=:\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{\lambda_2}+4^{|\lambda_3|}}$，由 A^{λ} 的定义得

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\,\psi_{\lambda}^{(1)}&=\frac{1}{\Delta}(2^{\lambda_1|}\mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(1)}+2^{|\lambda_2}\mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(2)}+2^{|\lambda_3|}\mathrm{curl}\,\underline{\psi}_{\lambda}^{(3)})\\&=\frac{1}{\Delta}\left[2^{|\lambda_1|}(2^{|\lambda_3}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}-2^{|\lambda_2|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)})+2^{|\lambda_2|}(-2^{\lambda_3|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+2^{|\lambda_1}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)})+2^{|\lambda_3|}(2^{|\lambda_2|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}-2^{\lambda_1|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)})\right]\\&=\vec{0};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\,\psi_{\lambda}^{(2)}&=A_{21}(2^{\lambda_3|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}-2^{|\lambda_2|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)})+A_{22}(-2^{|\lambda_3}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+2^{\lambda_1|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)})+A_{23}(2^{\lambda_2|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}-2^{|\lambda_1|}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)})\\&=(A_{23}2^{|\lambda_2|}-A_{22}2^{\lambda_3|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+(A_{21}2^{|\lambda_3|}-A_{23}2^{|\lambda_1|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}+(A_{22}2^{|\lambda_1}-A_{21}2^{|\lambda_2|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)}.\end{aligned}$$

类似可得

$$\mathrm{curl}\,\psi_{\lambda}^{(3)}=(A_{33}2^{|\lambda_2|}-A_{32}2^{|\lambda_3|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+(A_{31}2^{|\lambda_3|}-A_{33}2^{|\lambda_1|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}+(A_{32}2^{|\lambda_1|}-A_{31}2^{|\lambda_2|})\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)}.$$

因为 $\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\square)$，利用注记 8.1.1 中的边界条件和分部积分可得

$$\left\langle \mathrm{curl}\vec{u},\ a\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(3)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}=\left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}(a\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(3)}) \right\rangle_{L^2(\square)^3}.$$

进一步，可见

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}(a\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(3)})&=\mathrm{curl}\begin{pmatrix} a\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3} \\ b\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3} \\ c\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}^{-} \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} (c2^{|\lambda_2|}-b2^{|\lambda_3|})\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}^{-} \\ (a2^{|\lambda_3|}-c2^{|\lambda_1|})\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}^{-} \\ (b2^{|\lambda_1|}-a2^{|\lambda_2|})\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3} \end{pmatrix}\\&=A_{21}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda}^{(1)}+A_{22}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda}^{(2)}+A_{23}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda}^{(3)}=\tilde{\psi}_{\lambda}^{(2)}.\end{aligned}$$

因此，$\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(2)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}=\left\langle \mathrm{curl}\vec{u},\ a\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_{\lambda}^{(3)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}$. 最后的等式类似可证.

注记 8.1.2 （1）矩阵 A^{λ} 的正交性可以保证式（8-3）和式（8-4）的解的存在性.

（2）如果 A^{λ} 是式（8-2）中的 Householder 变换，则

$$A_{23}2^{|\lambda_2|}-A_{22}2^{|\lambda_3|}=-\Delta A_{31},\ A_{21}2^{|\lambda_3|}-A_{23}2^{|\lambda_1|}=-\Delta A_{32},\ A_{22}2^{|\lambda_1|}-A_{21}2^{|\lambda_2|}=-\Delta A_{33}.$$

因此，在这种特殊情况下，有

$$\operatorname{curl}\psi_{\lambda}^{(2)}=-\Delta\left(A_{31}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+A_{32}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}+A_{33}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)}\right),$$
$$\operatorname{curl}\psi_{\lambda}^{(3)}=\Delta\left(A_{21}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(1)}+A_{22}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(2)}+A_{23}\underline{\sigma}_{\lambda}^{(3)}\right).$$

定理 8.1.1 函数族 $\Psi^{\text{curl}}=:\left\{\psi_{\lambda}^{(1)}\middle|\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 是 $H_{0,\Gamma}(\text{curl}0;\ \square)$ 的 Riesz 基.

证明 由命题 8.1.2，$\left\{\psi_{\lambda}^{(k)}\middle|k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 是 $L^2(\square)^3$ 的 Riesz 基，对偶为 $\left\{\tilde{\psi}_{\lambda}^{(k)}\middle|k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$. 因此，$\forall\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\text{curl}0;\ \square)\subset L^2(\square)^3$ 有唯一的展开

$$\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}c_{\lambda}^{(k)}\psi_{\lambda}^{(k)},$$

而且 $\|\vec{u}\|_{L^2(\square)^3}^2\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}\left|c_{\lambda}^{(k)}\right|^2$. 注意到 $\operatorname{curl}\vec{u}=\vec{0}$，由引理 8.1.2 可知

$$c_{\lambda}^{(k)}=\left\langle\vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(k)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}=0,\ k=2,\ 3.$$

进一步，由 $\operatorname{curl}\psi_{\lambda}^{(1)}=\vec{0}$ 可知，Ψ^{curl} 是 $H_{0,\Gamma}(\text{curl}0;\ \square)$ 的 Riesz 基.

注记 8.1.3 各向异性无旋度小波变换与标准的各向异性小波变换相关，从而具有快速算法. 事实上，因为 $\left\{\psi_{\lambda}^{(k)}\middle|k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 是 $L^2(\square)^3$ 的 Riesz 基，可以将 $\left\{\psi_{\lambda}^{(k)}\middle|k=2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 看作无旋度基 $\left\{\psi_{\lambda}^{(1)}\middle|\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 的补函数. 令 $H^{\aleph}(\square)=:\operatorname{span}\left\{\psi_{\lambda}^{(k)}\middle|k=2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$，则

$$L^2(\square)^3=H_{0,\Gamma}(\text{curl}0;\ \square)\dot{+}H^{\aleph}(\square).$$

对任意的 $\vec{u}\in L^2(\square)^3$，有分解

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}d_{\lambda}^{\text{curl}}\psi_{\lambda}^{(1)}+\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left(d_{\lambda}^{\aleph,1}\psi_{\lambda}^{(2)}+d_{\lambda}^{\aleph,2}\psi_{\lambda}^{(3)}\right)\\&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left(d_{\lambda}^{\text{curl}},\ d_{\lambda}^{\aleph,1},\ d_{\lambda}^{\aleph,2}\right)\begin{pmatrix}\psi_{\lambda}^{(1)}\\\psi_{\lambda}^{(2)}\\\psi_{\lambda}^{(3)}\end{pmatrix}\\&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left(d_{\lambda}^{\text{curl}},\ d_{\lambda}^{\aleph,1},\ d_{\lambda}^{\aleph,2}\right)A^{\lambda}\begin{pmatrix}\underline{\psi}_{\lambda}^{(1)}\\\underline{\psi}_{\lambda}^{(2)}\\\underline{\psi}_{\lambda}^{(3)}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

如果 $\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left(d_{\lambda}^{1}\underline{\psi}_{\lambda}^{(1)}+d_{\lambda}^{2}\underline{\psi}_{\lambda}^{(2)}+d_{\lambda}^{3}\underline{\psi}_{\lambda}^{(3)}\right)$，则

$$\left(d_{\lambda}^{\text{curl}},\ d_{\lambda}^{\aleph,1},\ d_{\lambda}^{\aleph,2}\right)A^{\lambda}=\left(d_{\lambda},\ d_{\lambda},\ d_{\lambda}^{3}\right).$$

由 A^{λ} 的正交性，可得

$$\begin{pmatrix}d_{\lambda}^{\text{curl}}\\d_{\lambda}^{\aleph,1}\\d_{\lambda}^{\aleph,2}\end{pmatrix}=\left(A^{\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}d_{\lambda}^{1}\\d_{\lambda}^{2}\\d_{\lambda}^{3}\end{pmatrix}=A^{\lambda}\begin{pmatrix}d_{\lambda}^{1}\\d_{\lambda}^{2}\\d_{\lambda}^{3}\end{pmatrix}.$$

定理 8.1.2 如果$\gamma>1$，则函数族

$$\Psi_{\mathrm{H}^1}^{\mathrm{curl}}=:\left\{\frac{1}{\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}}\psi_\lambda^{(1)}\ \middle|\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$$

是$H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\cap H^1(\square)^3$的 Riesz 基.

证明 设$\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\cap H^1(\square)^3$，由注记 8.1.1 可得

$$\vec{u}\in H^1_{0,\Gamma_1}(\square)\times H^1_{0,\Gamma_2}(\square)\times H^1_{0,\Gamma_3}(\square)\subseteq H^1_{0,\Gamma_1}(\square)\times H^1_{0,\Gamma_2}(\square)\times H^1_{0,\Gamma_3}(\square).$$

由命题 8.1.2，$\left\{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})^{\frac{1}{2}}\psi_\lambda^{(k)}\ \middle|k=1,\ 2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$是$H^1_{0,\Gamma_1}(\square)\times H^1_{0,\Gamma_2}(\square)\times H^1_{0,\Gamma_3}(\square)$的 Riesz 基，所以有展开

$$\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}c_\lambda^{(k)}\frac{1}{\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}}\psi_\lambda^{(k)},$$

而且$\|\vec{u}\|^2_{H^1(\square)^3}\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}\left|c_\lambda^{(k)}\right|^2$. 这里，收敛是在$H^1(\square)^3$的意义下.

因为$\mathrm{curl}\vec{u}=\vec{0}$，所以$c_\lambda^{(k)}=0, k=2, 3$. 最后，

$$\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}c_\lambda^{(1)}\frac{1}{\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{\lambda_2}}}\psi_\lambda^{(1)},$$

而且$\|\vec{u}\|^2_{H^1(\square)^3}\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left|c_\lambda^{(1)}\right|^2$. 结论得证.

8.2 Helmholtz 分解

本节给出无旋度空间的正交补空间. 令

$$\tilde{\Lambda}_k=\bigcup_{m=1,m\neq k}^{3}[0,\ 1]^{m-1}\times\{1\}\times[0,\ 1]^{3-m}.$$

引理 8.2.1 设$\vec{q}\in H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square)$, 则

$$\left\langle\mathrm{curl}\vec{q},\psi_\lambda^{(k)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}=\begin{cases}0, & k=1,\\ \left\langle\vec{q},\mathrm{curl}\psi_\lambda^{(2)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}, & k=2,\\ \left\langle\vec{q},\mathrm{curl}\psi_\lambda^{(3)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}, & k=3.\end{cases}$$

当$k=2$和 3 时，有

$$\tilde{\psi}_\lambda^{(k)}=\mathrm{curl}\ (a\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(3)})\in\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square)),$$

其中，常数a, b, c分别为式（8-3）和式（8-4）的解.

证明 因为$\vec{q}\in H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square)$，所以对$\forall x,\ y,\ z\in[0,\ 1]$，有$q_1(x,\ 1,\ z)=q_1(x,\ y,\ 1)=0,\ q_2(1,\ y,\ z)=q_2(x,\ y,\ 1)=0,\ q_3(1,\ y,\ z)=q_3(x,\ 1,\ z)=0$.

令$\psi_\lambda^{(k)}=(v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$，则对$\forall x, y, z\in[0, 1]$，有$v_1(x, 0, z)=v_1(x, y, 0)=0, v_2(0, y, z)=v_2(x, y, 0)=$

0, $v_3(0, y, z)=v_3(x, 0, z)=0$. 分部积分可得

$$\left\langle \mathrm{curl}\vec{q},\ \psi_\lambda^{(k)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}=\left\langle \vec{q},\ \mathrm{curl}\,\psi_\lambda^{(k)} \right\rangle_{L^2(\square)^3}.$$

注意到 $\mathrm{curl}\,\psi_\lambda^{(1)}=\vec{0}$, 第一个结论得证. 进一步, 容易验证

$$a\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(1)}+b\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(2)}+c\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(3)}\in H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square),$$

由引理 8.1.2 可得第二个结论.

定理 8.2.1 函数族 $\tilde{\Psi}^{\mathrm{curl}}=:\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(k)} \middle| k=2, 3, \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 在 $\|\cdot\|_{L^2(\square)^3}$ 的意义下构成空间 $\mathrm{curl}H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times(H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square))$ 的 Riesz 基.

证明 对 $\forall\vec{u}\in\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square))$, 存在 $\vec{q}\in H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square)$ 使得 $\vec{u}=\mathrm{curl}\vec{q}\in L^2(\square)^3$. 因为 $\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(k)} \middle| k=1, 2, 3, \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 是 $L^2(\square)^3$ 的 Riesz 基, 所以有唯一的展开

$$\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\ \sum_{k=1}^{3} d_\lambda^{(k)}\tilde{\psi}_\lambda^{(k)},$$

而且 $\|\vec{u}\|^2_{L^2(\square)^3}\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}\left|d_\lambda^{(k)}\right|^2$. 注意到

$$d_\lambda^{(1)}=\left\langle\vec{u},\ \psi_\lambda^{(1)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}=\left\langle\mathrm{curl}\vec{q},\ \psi_\lambda^{(1)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}=0,$$

由引理 8.2.1 可得结论.

注记 8.2.1 因为 $\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(k)} \middle| k=1, 2, 3, \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 是 $L^2(\square)^3$ 的 Riesz 基, 可以将 $\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(1)} \middle| \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 看作 $\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(k)} \middle| k=2, 3, \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 的补函数. 令 $H^{\hbar}(\square)=:\mathrm{span}\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(1)} \middle| \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$, 则

$$L^2(\square)^3=H^{\hbar}(\square)\dotplus\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{\Lambda}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{\Lambda}_3}(\square)).$$

对任意的 $\vec{u}\in L^2(\square)^3$, 有

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}} d_\lambda^{\hbar}\tilde{\psi}_\lambda^{(1)}+\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}(d_\lambda^{\mathrm{div},1}\tilde{\psi}_\lambda^{(2)}+d_\lambda^{\mathrm{div},2}\tilde{\psi}_\lambda^{(3)})\\&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}(d_\lambda^{\hbar},\ d_\lambda^{\mathrm{div},1},\ d_\lambda^{\mathrm{div},2})\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_\lambda^{(1)}\\ \tilde{\psi}_\lambda^{(2)}\\ \tilde{\psi}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}\\&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}(d_\lambda^{\hbar},\ d_\lambda^{\mathrm{div},1},\ d_\lambda^{\mathrm{div},2})A^\lambda\begin{pmatrix}\underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

如果 $\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}(d_\lambda^1\underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(1)}+d_\lambda^2\underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(2)}+d_\lambda^3\underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(3)})$, 则

$$(d_\lambda^{\hbar},\ d_\lambda^{\mathrm{div},1},\ d_\lambda^{\mathrm{div},2})A^\lambda=(d_\lambda^1,\ d_\lambda^2,\ d_\lambda^3).$$

进一步, 由矩阵 A^λ 的正交性可得

$$\begin{pmatrix}d_\lambda^{\hbar}\\ d_\lambda^{\mathrm{div},1}\\ d_\lambda^{\mathrm{div},2}\end{pmatrix}=(A^\lambda)^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}d_\lambda^1\\ d_\lambda^2\\ d_\lambda^3\end{pmatrix}=A^\lambda\begin{pmatrix}d_\lambda^1\\ d_\lambda^2\\ d_\lambda^3\end{pmatrix}.$$

下列结论是著名的 Helmholtz 分解.

定理 8.2.2　$L^2(\square)^3=H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\oplus^{\perp L^2(\square)^3}\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square))$.

证明　由于 $H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)$ 是 $L^2(\square)^3$ 的一个闭子空间, 故

$$L^2(\square)^3=H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\oplus H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)^{\perp}.$$

利用空间 $H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)$ 和 $\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square))$ 中基的特点以及双正交性, 可得

$$\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square))\subseteq H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)^{\perp}.$$

另一方面, 因为 $\tilde{\Psi}$ 是 $L^2(\square)^3$ 的 Riesz 基, 所以对任意的 $\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)^{\perp}\subseteq L^2(\square)^3$, 存在唯一的展开

$$\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}d_\lambda^{(k)}\tilde{\psi}_\lambda^{(k)}.$$

注意到 $\psi_\lambda^{(1)}\in\Psi^{\mathrm{curl}}\subseteq H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)$, 则 $d_\lambda^{(1)}=\left\langle\vec{u},\ \psi_\lambda^{(1)}\right\rangle=0$. 因为 $\tilde{\Psi}^{\mathrm{curl}}=:\left\{\tilde{\psi}_\lambda^{(k)}\middle|k=2,\ 3,\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 是 $\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square))$ 的 Riesz 基, 所以

$$H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)^{\perp}\subseteq\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square)).$$

最后, 可得

$$H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)^{\perp}=\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square)),$$

结论得证.

注记 8.2.2　设 $\vec{u}\in\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square))$, 则 $\mathrm{div}\,\vec{u}=0$. 事实上, 定义 $H_{0,\tilde{\Gamma}}(\mathrm{div}0;\square)=:\left\{\vec{u}\in H(\mathrm{div};\ \square):\mathrm{div}\,\vec{u}=0,\ 在\tilde{\Gamma}上\ \vec{u}\cdot\vec{n}=0\right\}$, 则

$$\mathrm{curl}(H^1_{0,\tilde{A}_1}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_2}(\square)\times H^1_{0,\tilde{A}_3}(\square))=H_{0,\tilde{\Gamma}}(\mathrm{div}0;\ \square)).$$

进一步, 可得 $L^2(\square)^3=H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\oplus^{\perp L^2(\square)^3}H_{0,\tilde{\Gamma}}(\mathrm{div}0;\ \square)$.

注记 8.2.3　显然, $\left\{\psi_\lambda^{(1)},\ \tilde{\psi}_\lambda^{(k)}\middle|k=2,\ 3;\ \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$ 构成 $L^2(\square)^3$ 的 Riesz 基. 然而, $\{\tilde{\psi}_\lambda^{(1)},\psi_\lambda^{(k)}|k=2,3;\lambda\in\vec{\nabla}\}$ 一般不是它的对偶. 事实上, 尽管当 $k=2,3$ 时, 利用 $\underline{\psi}_\lambda^{(1)}\perp\underline{\psi}_\lambda^{(k)}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^\lambda$ 的正交性可得 $\psi_\lambda^{(1)}\perp\psi_\lambda^{(k)}$, $\lambda\in\vec{\nabla}$, 但是 $\psi_\lambda^{(1)}\perp\psi_\mu^{(k)}$, $\lambda\neq\mu\in\vec{\nabla}$ 一般不成立. 因此, 期望得到一个计算 Helmholtz 分解的有效算法.

下面, 借鉴参考文献[99]的思路给出一个算法.

因为 $L^2(\square)^3=H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\oplus^{\perp L^2(\square)^3}H_{0,\tilde{\Gamma}}(\mathrm{div}0;\ \square)$, 所以

$$\vec{u}=Q\vec{u}+P\vec{u}=:\vec{u}_{\mathrm{curl}}+\vec{u}_{\mathrm{div}}.$$

算法主要基于下列两个非正交分解:

$$L^2(\square)^3=H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl}0;\ \square)\dotplus H^{\aleph}(\square)\ \ 和\ \ L^2(\square)^3=H^{\hbar}(\square)\dotplus H_{0,\tilde{\Gamma}}(\mathrm{div}0;\ \square).$$

给定一个向量场 $\vec{u}\in L^2(\square)^3$, 将它分解为

$$\vec{u}=Q_{\text{curl}}\vec{u}+P_{\aleph}\vec{u} \text{ 和 } \vec{u}=Q_{\hbar}\vec{u}+P_{\text{div}}\vec{u},$$

注记 8.1.3 和注记 8.2.1 表明上面两个分解具有快速算法.

算法的具体步骤为: 令 $\vec{u}^0=:\vec{u}$.

$$step\ 0:\begin{cases}\vec{u}^{\frac{1}{2}}=\vec{u}^0-Q_{\text{curl}}\vec{u}^0=P_{\aleph}\vec{u}^0,\\ \vec{u}^1=\vec{u}^{\frac{1}{2}}-P_{\text{div}}\vec{u}^{\frac{1}{2}}=Q_{\hbar}\vec{u}^{\frac{1}{2}};\end{cases}$$

下面的步骤类似定义, 可得 $\vec{u}^{p+1}=Q_{\hbar}P_{\aleph}\vec{u}^p$. 而且,

$$\vec{u}^p=\vec{u}^{p+1}+Q_{\text{curl}}\vec{u}^p+P_{\text{div}}P_{\aleph}\vec{u}^p=:\vec{u}^{p+1}+\vec{u}^p_{\text{curl}}+\vec{u}^p_{\text{div}},\ p\geqslant 0.$$

最后, $\vec{u}=\vec{u}^{p+1}+\sum_{i=0}^{p}(\vec{u}^i_{\text{curl}}+\vec{u}^i_{\text{div}})$. 因此, 若 $p\to\infty$ 时, $\left\|\vec{u}^p\right\|_{L^2(\square)^3}\to 0$, 则

$$\vec{u}_{\text{curl}}=\sum_{p=0}^{\infty}\vec{u}^p_{\text{curl}},\quad \vec{u}_{\text{div}}=\sum_{p=0}^{\infty}\vec{u}^p_{\text{div}}.$$

将上面的算法应用到 $L^2(\square)^3$ 中的三维向量场

$$\vec{u}(x,\ y,\ z)=\begin{pmatrix}-\sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\cos(2\pi z)+\sin(2\pi x)\cos(2\pi y)-\sin(2\pi x)\cos(2\pi z)\\ -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\cos(2\pi z)+\sin(2\pi y)\cos(2\pi z)-\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\\ -\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)\sin(2\pi z)+\cos(2\pi x)\sin(2\pi z)-\cos(2\pi y)\sin(2\pi z)\end{pmatrix}.$$

在 32^3 个格点进行离散化, 并取 Φ_ℓ,Ψ_ℓ 和 $\tilde{\Phi}_\ell,\tilde{\Psi}_\ell$ 为参考文献[118]中的区间小波($d=2,\tilde{d}=4$). 图 8-1 给出 $\left\|\vec{u}^p\right\|_{L^2(\square)^3}$ 与迭代数 p 的关系.

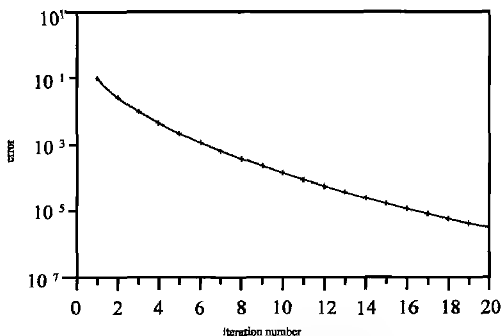


图 8-1 迭代数与误差的关系

8.3 算子表示

最后, 给出 curl 和 div 算子在小波坐标下的表示以及对应的范数刻画.

定理 8. 3. 1 在 $H_{0,\vec{\Gamma}}(\text{div};\square)=:\left\{\vec{u}\in H(\text{div};\square)\middle|\text{在边界 }\vec{\Gamma}\text{ 上 }\vec{u}\cdot\vec{n}=0\right\}$ 上, 有

$$\text{div}\,\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left\langle\vec{u},\ \psi_\lambda^{(1)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\text{div}\,\tilde{\psi}_\lambda^{(1)},$$

而且 $\|\text{div}\,\vec{u}\|^2_{L^2(\square)}\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})\left|\left\langle\vec{u},\ \psi_\lambda^{(1)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\right|^2.$

证明 设$\vec{u}\in H_{0,\tilde{\Gamma}}(\mathrm{div};\square)$，则$\mathrm{div}\,\vec{u}\in L^2(\square)$．因为$\left\{\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}^-_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}^-_{\lambda_3}\middle|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}\right\}$是$L^2(\square)$中的Riesz基，对偶为$\left\{\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\middle|\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\vec{\nabla}\right\}$，所以存在唯一的展开

$$\mathrm{div}\,\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left\langle\mathrm{div}\,\vec{u},\ \psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\right\rangle_{L^2(\square)}\tilde{\psi}^-_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3},\tag{8-5}$$

而且，$\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|^2_{L^2(\square)}\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\left|\left\langle\mathrm{div}\,\vec{u},\ \psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\right\rangle_{L^2(\square)}\right|^2$．注意到

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0\text{ 在}\tilde{\Gamma}\text{上成立}\ \Leftrightarrow\ u_k=0\text{ 在}\tilde{\Gamma}_k(k=1,\ 2,\ 3)\text{ 上成立.}$$

分部积分可得

$$\left\langle\mathrm{div}\,\vec{u},\ \psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\right\rangle_{L^2(\square)}=-\left\langle\vec{u},\ \mathrm{grad}\,\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\right\rangle_{L^2(\square)^3}.\tag{8-6}$$

进一步，可知

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}&=\begin{pmatrix}2^{|\lambda_1|}\psi_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\\2^{|\lambda_2|}\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi_{\lambda_2}\otimes\psi^+_{\lambda_3}\\2^{|\lambda_3|}\psi^+_{\lambda_1}\otimes\psi^+_{\lambda_2}\otimes\psi_{\lambda_3}\end{pmatrix}\\&=2^{|\lambda_1|}\underline{\psi}^{(1)}_\lambda+2^{|\lambda_2|}\underline{\psi}^{(2)}_\lambda+2^{|\lambda_3|}\underline{\psi}^{(3)}_\lambda\\&=\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}\,\psi^{(1)}_\lambda.\end{aligned}\tag{8-7}$$

而且，有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\tilde{\psi}^{(1)}_\lambda&=\frac{1}{\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}}\mathrm{div}\left(2^{|\lambda_1|}\underline{\tilde{\psi}}^{(1)}_\lambda+2^{|\lambda_2|}\underline{\tilde{\psi}}^{(2)}_\lambda\right)+2^{|\lambda_3|}\underline{\tilde{\psi}}^{(3)}_\lambda)\\&=\frac{1}{\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}}\mathrm{div}\begin{pmatrix}2^{|\lambda_1|}\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}^-_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}^-_{\lambda_3}\\2^{|\lambda_2|}\tilde{\psi}^-_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}^-_{\lambda_3}\\2^{|\lambda_3|}\tilde{\psi}^-_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}^-_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\end{pmatrix}\\&=-\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}\,\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}.\end{aligned}\tag{8-8}$$

将式（8-6）至式（8-8）代入式（8-5）可得结论.

定理 8.3.2 在$H_{0,\Gamma}(\mathrm{curl};\ \square)$上，有

$$\mathrm{curl}\vec{u}=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=2}^{3}\left\langle\vec{u},\ \tilde{\psi}^{(k)}_\lambda\right\rangle_{L^2(\square)^3}\mathrm{curl}\,\psi^{(k)}_\lambda,$$

而且$\|\mathrm{curl}\vec{u}\|^2_{L^2(\square)^3}\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})\sum_{k=2}^{3}\left|\left\langle\vec{u},\tilde{\psi}^{(k)}_\lambda\right\rangle_{L^2(\square)^3}\right|^2$.

证明 令

$$\boldsymbol{Z}_\lambda=:\begin{pmatrix}0&2^{|\lambda_3|}&-2^{|\lambda_2|}\\-2^{|\lambda_3|}&0&2^{|\lambda_1|}\\2^{|\lambda_2|}&-2^{|\lambda_1|}&0\end{pmatrix}=-(\boldsymbol{Z}_\lambda)^{\mathrm{T}},$$

则有

$$\operatorname{curl}\begin{pmatrix}\underline{\psi}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\psi}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\psi}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{Z}_\lambda\begin{pmatrix}\underline{\sigma}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\sigma}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\sigma}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}\ \text{和}\ \operatorname{curl}\begin{pmatrix}\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{Z}_\lambda\begin{pmatrix}\underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\tilde{\psi}}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}.$$

对 $\lambda\in\vec{\nabla}$，令

$$\begin{pmatrix}\sigma_\lambda^{(1)}\\ \sigma_\lambda^{(2)}\\ \sigma_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}=:\boldsymbol{A}^\lambda\begin{pmatrix}\underline{\sigma}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\sigma}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\sigma}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_\lambda^{(1)}\\ \tilde{\sigma}_\lambda^{(2)}\\ \tilde{\sigma}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}=:\boldsymbol{A}^\lambda\begin{pmatrix}\underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(1)}\\ \underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(2)}\\ \underline{\tilde{\sigma}}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}.$$

可得

$$\operatorname{curl}\begin{pmatrix}\psi_\lambda^{(1)}\\ \psi_\lambda^{(2)}\\ \psi_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^\lambda\boldsymbol{Z}_\lambda(\boldsymbol{A}^\lambda)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\sigma_\lambda^{(1)}\\ \sigma_\lambda^{(2)}\\ \sigma_\lambda^{(3)}\end{pmatrix},\operatorname{curl}\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_\lambda^{(1)}\\ \tilde{\sigma}_\lambda^{(2)}\\ \tilde{\sigma}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^\lambda\boldsymbol{Z}_\lambda(\boldsymbol{A}^\lambda)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_\lambda^{(1)}\\ \tilde{\psi}_\lambda^{(2)}\\ \tilde{\psi}_\lambda^{(3)}\end{pmatrix}.$$

任意满足条件（8-1）的正交矩阵可以写成形式

$$\boldsymbol{A}^\lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{Q}}\\ 0 & & \end{pmatrix}\boldsymbol{A}_p^\lambda,$$

其中，$\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{2\times2}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{A}_p^\lambda$ 是式（8-2）中的 Householder 变换．直接计算可得

$$-\boldsymbol{A}^\lambda\boldsymbol{Z}_\lambda(\boldsymbol{A}^\lambda)^{\mathrm{T}}=\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\hat{\boldsymbol{Q}}}\\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

这里，$\hat{\boldsymbol{Q}}$ 是一个正交矩阵．

$$\begin{pmatrix}\left\langle\vec{u},\ \operatorname{curl}\tilde{\sigma}_\lambda^{(1)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\\ \left\langle\vec{u},\ \operatorname{curl}\tilde{\sigma}_\lambda^{(2)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\\ \left\langle\vec{u},\ \operatorname{curl}\tilde{\sigma}_\lambda^{(3)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\end{pmatrix}=\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\hat{\boldsymbol{Q}}}\\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left\langle\vec{u},\ \tilde{\psi}_\lambda^{(1)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\\ \left\langle\vec{u},\ \tilde{\psi}_\lambda^{(2)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\\ \left\langle\vec{u},\ \tilde{\psi}_\lambda^{(3)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\end{pmatrix}.$$

设 $\vec{u}\in H_{0,\Gamma}(\operatorname{curl};\ \Box)$，则 $\operatorname{curl}\vec{u}\in L^2(\Box)^3$. 因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\vec{u}&=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}\left\langle\operatorname{curl}\vec{u},\ \tilde{\sigma}_\lambda^{(k)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\sigma_\lambda^{(k)}\\ &=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=1}^{3}\left\langle\vec{u},\ \operatorname{curl}\tilde{\sigma}_\lambda^{(k)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\sigma_\lambda^{(k)}\\ &=\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=2}^{3}\left\langle\vec{u},\ \operatorname{curl}\tilde{\sigma}_\lambda^{(k)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\sigma_\lambda^{(k)},\end{aligned}\tag{8-9}$$

而且

$$\|\operatorname{curl}\vec{u}\|_{L^2(\Box)^3}^2\simeq\sum_{\lambda\in\vec{\nabla}}\sum_{k=2}^{3}\left|\left\langle\vec{u},\ \operatorname{curl}\tilde{\sigma}_\lambda^{(k)}\right\rangle_{L^2(\Box)^3}\right|^2.$$

注意到 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 是正交的，且

$$\begin{pmatrix}\left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}\tilde{\sigma}_{\lambda}^{(2)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\\ \left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}\tilde{\sigma}_{\lambda}^{(3)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\end{pmatrix}=\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}}\begin{pmatrix}\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(2)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\\ \left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(3)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\|\mathrm{curl}\vec{u}\|_{L^2(\square)^3}^2&\simeq\sum_{\lambda\in\check{\nabla}}\sum_{k=2}^{3}\left|\left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}\tilde{\sigma}_{\lambda}^{(k)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\right|^2\\&=\sum_{\lambda\in\check{\nabla}}(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|})\sum_{k=2}^{3}\left|\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(k)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\right|^2.\end{aligned}$$

进一步,

$$\begin{pmatrix}\mathrm{curl}\psi_{\lambda}^{(2)}\\ \mathrm{curl}\psi_{\lambda}^{(3)}\end{pmatrix}=-\sqrt{4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|}+4^{|\lambda_3|}}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}}\begin{pmatrix}\sigma_{\lambda}^{(2)}\\ \sigma_{\lambda}^{(3)}\end{pmatrix}.$$

最后, 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{3}\left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}\tilde{\sigma}_{\lambda}^{(k)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\sigma_{\lambda}^{(k)}\\&=\left(\left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}\tilde{\sigma}_{\lambda}^{(2)}\right\rangle_{L^2(\square)^3},\left\langle \vec{u},\ \mathrm{curl}\tilde{\sigma}_{\lambda}^{(3)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\right)\begin{pmatrix}\sigma_{\lambda}^{(2)}\\ \sigma_{\lambda}^{(3)}\end{pmatrix}\\&=-\left(\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(2)}\right\rangle_{L^2(\square)^3},\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(3)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\right)\hat{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{curl}\psi_{\lambda}^{(2)}\\ \mathrm{curl}\psi_{\lambda}^{(3)}\end{pmatrix}\\&=\sum_{k=2}^{3}\left\langle \vec{u},\ \tilde{\psi}_{\lambda}^{(k)}\right\rangle_{L^2(\square)^3}\mathrm{curl}\psi_{\lambda}^{(k)}.\end{aligned}\tag{8-10}$$

最后的等式是因为 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 是反对称的, 且 $-\hat{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 将式（8-10）代入式（8-9）得证.

第 9 章　具有边界条件的各向异性无旋度小波

第7章和第8章中的无旋度小波只满足片边界条件，本章介绍具有切向边界的各向异性无旋度小波.

9.1　向量空间的正交分解

令$I=(0,1)$. 对$n=2,3$，首先定义下列函数空间

$$H(\text{curl};I^n)=:\left\{\vec{u}\in L^2(I^n)^n\,\middle|\,\text{curl}\vec{u}\in L^2(I^2)\text{ 或 }L^2(I^3)^3\right\},$$

$$H_0(\text{curl};I^n)=:\left\{\vec{u}\in H(\text{curl};I^n)\,\middle|\,\text{在边界}\Gamma\text{上}\vec{u}\times\vec{n}=0\text{ 或 }\vec{0}\right\},$$

$$\mathcal{H}(I^n)=:H_0(\text{curl}0;I^n)=:\left\{\vec{u}\in H_0(\text{curl};I^n)\,\middle|\,\text{curl}\vec{u}=0\text{ 或 }\vec{0}\right\}.$$

分部积分可得

$$\mathcal{H}(I^2)\perp\overrightarrow{\text{curl}}H^1(I^2)\quad\text{和}\quad\mathcal{H}(I^3)\perp\text{curl}H^1(I^3)^3.$$

令$L^2=:L^2(I)$, $L^{2,0}=:\left\{u\in L^2\mid\int_0^1u(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}$. 进一步，定义

$$\widehat{L^2(I^2)^2}=:L^{2,0}\otimes L^2\times L^2\otimes L^{2,0},$$

$$\widehat{L^2(I^3)^3}=:L^{2,0}\otimes L^2\otimes L^2\times L^2\otimes L^{2,0}\otimes L^2\times L^2\otimes L^2\otimes L^{2,0},$$

$$\hat{H}^s(I^n)=:H^s(I^n)\cap(L^{2,0}\otimes\cdots\otimes L^{2,0}),\ n=1,2.$$

当$n=3$时，定义

$$\hat{H}_1^s(I^3)=:H^s(I^3)\cap(L^2\otimes L^{2,0}\otimes L^{2,0}),$$

$$\hat{H}_2^s(I^3)=:H^s(I^3)\cap(L^{2,0}\otimes L^2\otimes L^{2,0}),$$

$$\hat{H}_3^s(I^3)=:H^s(I^3)\cap(L^{2,0}\otimes L^{2,0}\otimes L^2).$$

最后，令$\hat{\mathcal{H}}(I^n)=:\mathcal{H}(I^n)\cap\widehat{L^2(I^n)^n}$, $n=2,3$.

下列假设将在第三部分证明.

假设1　存在$\widehat{L^2(I^n)^n}$中的双正交Riesz基$\Psi^{(n)}=\Psi_{\text{curl}}^{(n)}\cup\Psi_{\text{comp}}^{(n)}$和$\tilde{\Psi}^{(n)}=\tilde{\Psi}_{\text{curl}}^{(n)}\cup\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(n)}$（小波类型）使得$\Psi_{\text{curl}}^{(n)}\subset\hat{\mathcal{H}}(I^n)$（$n=2,3$）；$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(2)}\subset\overrightarrow{\text{curl}}\hat{H}^1(I^2)$或$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(3)}\subset\text{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))$.

命题9.1.1　$\Psi_{\mathrm{curl}}^{(n)}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{comp}}^{(2)}$和$\tilde{\Psi}_{\mathrm{comp}}^{(3)}$分别为空间$\hat{H}(I^n)(n=2,3)$，$\overrightarrow{\mathrm{curl}}\hat{H}^1(I^2)$和$\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))$的Riesz基.

证明　设$\vec{u}\in\hat{H}(I^n)(n=2,3)$，则

$$\hat{H}(I^2)\perp\overrightarrow{\mathrm{curl}}\hat{H}^1(I^2),\ \hat{H}(I^3)\perp\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3)).$$

进一步，可得

$$\vec{u}=\left\langle\vec{u},\tilde{\Psi}^{(n)}\right\rangle_{L^2(I^n)^n}\Psi^{(n)}=\left\langle\vec{u},\tilde{\Psi}_{\mathrm{curl}}^{(n)}\right\rangle_{L^2(I^n)^n}\Psi_{\mathrm{curl}}^{(n)},$$

而且$\|\vec{u}\|_{L^2(I^n)^n}\simeq\|\left\langle\vec{u},\tilde{\Psi}_{\mathrm{curl}}^{(n)}\right\rangle_{L^2(I^n)^n}\|_{\ell^2}$．即$\Psi_{\mathrm{curl}}^{(n)}$为$\hat{H}(I^n)(n=2,3)$的Riesz基.

最后，利用$\overrightarrow{\mathrm{curl}}$和curl的定义容易验证

$$\overrightarrow{\mathrm{curl}}\hat{H}^1(I^2)\subset\widehat{L^2(I^2)^2},\ \mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))\subset\widehat{L^2(I^3)^3},$$

剩余的结论类似可证.

命题9.1.2　下列分解成立:

$$\widehat{L^2(I^2)^2}=\hat{H}(I^2)\oplus\overrightarrow{\mathrm{curl}}\hat{H}^1(I^2),\ \widehat{L^2(I^3)^3}=\hat{H}(I^3)\oplus\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3)).$$

证明　只证明$n=3$的情形，另一种情形类似可证．因为对任意的$\vec{u}\in\hat{H}(I^3)^\perp$，

$$\vec{u}=\left\langle\vec{u},\Psi_{\mathrm{curl}}^{(3)}\right\rangle_{L^2(I^3)^3}\tilde{\Psi}_{\mathrm{curl}}^{(3)}+\left\langle\vec{u},\Psi_{\mathrm{comp}}^{(3)}\right\rangle_{L^2(I^3)^3}\tilde{\Psi}_{\mathrm{comp}}^{(3)}=\left\langle\vec{u},\Psi_{\mathrm{comp}}^{(3)}\right\rangle_{L^2(I^3)^3}\tilde{\Psi}_{\mathrm{comp}}^{(3)}.$$

所以$\hat{H}(I^3)^\perp\subseteq\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))$．另一方面，因为$\hat{H}(I^3)\perp\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))$，所以$\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))\subseteq\hat{H}(I^3)^\perp$．因此，

$$\widehat{L^2(I^3)^3}=\hat{H}(I^3)\oplus\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times(\hat{H}_2^1(I^3)\times(\hat{H}_3^1(I^3)).$$

下面考虑$L^2(I^n)^n$的正交分解．为此，令$L^2=L^{2,0}\oplus\Lambda$．则有正交分解

$$L^2\otimes L^2=L^{2,0}\otimes L^2\oplus\Lambda\otimes L^2, L^2\otimes L^2=L^2\otimes L^{2,0}\oplus L^2\otimes\Lambda;$$
$$L^2\otimes L^2\otimes L^2=L^{2,0}\otimes L^2\otimes L^2\oplus\Lambda\otimes L^2\otimes L^2;$$
$$L^2\otimes L^2\otimes L^2=L^2\otimes L^{2,0}\otimes L^2\oplus L^2\otimes\Lambda\otimes L^2;$$
$$L^2\otimes L^2\otimes L^2=L^2\otimes L^2\otimes L^{2,0}\oplus L^2\otimes L^2\otimes\Lambda.$$

进一步，可得

$$L^2(I^2)^2=\widehat{L^2(I^2)^2}\oplus\begin{pmatrix}\Lambda\otimes L^2\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\L^2\otimes\Lambda\end{pmatrix},\tag{9-1}$$

$$L^2(I^3)^3=\widehat{L^2(I^3)^3}\oplus\begin{pmatrix}\Lambda\otimes L^2\otimes L^2\\0\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\L^2\otimes\Lambda\otimes L^2\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\0\\L^2\otimes L^2\otimes\Lambda\end{pmatrix}.\tag{9-2}$$

由命题9.1.2，可知

$$\widehat{L^2(I^2)^2}=\hat{H}(I^2)\oplus\overrightarrow{\mathrm{curl}}\hat{H}^1(I^2),$$

$$\widehat{L^2(I^3)^3}=\hat{H}(I^3)\oplus\mathrm{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3)).$$

而且,

$$\begin{pmatrix}\Lambda\otimes L^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\L^2\otimes\Lambda\end{pmatrix}\subset\overrightarrow{\mathrm{curl}}H^1(I^2),$$

$$\begin{pmatrix}\Lambda\otimes L^2\otimes L^2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\L^2\otimes\Lambda\otimes L^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\L^2\otimes L^2\otimes\Lambda\end{pmatrix}\subset\mathrm{curl}H^1(I^3)^3.$$

最后，可得

$$L^2(I^2)^2=H(I^2)\oplus\overrightarrow{\mathrm{curl}}H^1(I^2)\quad 和\quad L^2(I^3)^3=H(I^3)\oplus\mathrm{curl}H^1(I^3)^3.$$

下面构造空间 $H(I^n)(n=2,3)$，$\overrightarrow{\mathrm{curl}}H^1(I^2)$ 和 $\mathrm{curl}H^1(I^3)^3$ 的Riesz基．当 $n=2$ 时，定义嵌套 $E^{(2)}_{\{1\}},E^{(2)}_{\{2\}}:L^2(I)\to L^2(I^2)^2,E^{(2)}_{\{1,2\}}:\widehat{L^2(I^2)^2}\to L^2(I^2)^2$ 为

$$(E^{(2)}_{\{1\}}v)(x_1,x_2)=v(x_2)\vec{e}_1,(E^{(2)}_{\{2\}}v)(x_1,x_2)=v(x_1)\vec{e}_2.$$

$$(E^{(2)}_{\{1,2\}}\vec{v})(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}v_i(x_1,x_2)\vec{e}_i,$$

类似地，当 $n=3$ 时，定义 $E^{(3)}_{\{1\}},E^{(3)}_{\{2\}},E^{(3)}_{\{3\}}:L^2(I)\to L^2(I^3)^3,E^{(3)}_{\{1,2,3\}}:\widehat{L^2(I^3)^3}\to L^2(I^3)^3$ 为

$$(E^{(3)}_{\{1\}}v)=v(x_2)v(x_3)\vec{e}_1,(E^{(3)}_{\{2\}}v)=v(x_1)v(x_3)\vec{e}_2,(E^{(3)}_{\{3\}}v)=v(x_1)v(x_2)\vec{e}_3.$$

$$(E^{(3)}_{\{1,2,3\}}\vec{v})(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}v_i(x_1,x_2,x_3)\vec{e}_i.$$

显然，$E^{(2)}_{\{1,2\}}=I,E^{(3)}_{\{1,2,3\}}=I$．而且，像满足

$$\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{1\}}=(\Lambda\otimes L^2,0)^{\mathrm{T}},\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{2\}}=(0,L^2\otimes\Lambda)^{\mathrm{T}};$$

$$\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{1\}}=(\Lambda\otimes L^2\otimes L^2,0,0)^{\mathrm{T}},\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{2\}}=(0,L^2\otimes\Lambda\otimes L^2,0)^{\mathrm{T}},\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{3\}}=(0,0,L^2\otimes L^2\otimes\Lambda)^{\mathrm{T}}.$$

进一步，利用式（9-1）和式（9-2）可得

$$L^2(I^2)^2=\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{1\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{2\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{1,2\}},$$

$$L^2(I^3)^3=\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{1\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{2\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{3\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{1,2,3\}}.$$

因为 $\mathrm{Im}(E^{(2)}_{\{1,2\}}|_{\hat{H}(I^2)})\subset H(I^2)$，$\mathrm{Im}(E^{(2)}_{\{1,2\}}|_{\overrightarrow{\mathrm{curl}}\hat{H}^1(I^2)})\subset\overrightarrow{\mathrm{curl}}H^1(I^2)$ 和 $\mathrm{Im}(E^{(3)}_{\{1,2,3\}}|_{\hat{H}(I^3)})\subset H(I^3)$，$\mathrm{Im}(E^{(3)}_{\{1,2,3\}}|_{\mathrm{curl}(\hat{H}^1_1(I^3)\times\hat{H}^1_2(I^3)\times\hat{H}^1_3(I^3))})\subset\mathrm{curl}H^1(I^3)^3$ 成立，所以 $L^2(I^2)^2=\mathrm{Im}(E^{(2)}_{\{1,2\}}|_{\hat{H}(I^2)})\oplus\mathrm{Im}(E^{(2)}_{\{1,2\}}|_{\mathrm{curl}\,\hat{H}^1(I^2)})\oplus\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{1\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(2)}_{\{2\}}$，$L^2(I^3)^3=\mathrm{Im}(E^{(3)}_{\{1,2,3\}}|_{\hat{H}(I^3)})\oplus\mathrm{Im}(E^{(3)}_{\{1,2,3\}}|_{\mathrm{curl}(\hat{H}^1_1(I^3)\times\hat{H}^1_2(I^3)\times\hat{H}^1_3(I^3))})\oplus\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{1\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{2\}}\oplus\mathrm{Im}E^{(3)}_{\{3\}}$.

利用命题9.1.1可得如下定理.

定理9.1.1 若假设I成立，则函数族 $\Psi_{\mathrm{curl}}=:\Psi^{(n)}_{\mathrm{curl}}(n=2,3)$ 是 $H(I^n)(n=2,3)$ 的Riesz基．$\tilde{\Psi}^{(2)}_{\mathrm{comp}}\cup E^{(2)}_{\{1\}}\tilde{\Psi}^{(1)}\cup E^{(2)}_{\{2\}}\tilde{\Psi}^{(1)}$ 和 $\tilde{\Psi}^{(3)}_{\mathrm{comp}}\cup E^{(3)}_{\{1\}}\tilde{\Psi}^{(1)}\cup E^{(3)}_{\{2\}}\tilde{\Psi}^{(1)}\cup E^{(3)}_{\{3\}}\tilde{\Psi}^{(1)}$ 分别为 $\overrightarrow{\mathrm{curl}}H^1(I^2)$ 和 $\mathrm{curl}H^1(I^3)^3$ 的Riesz基.

注记9.1.1 事实上，当n=2, 3时，有$\hat{H}(I^n)=H(I^n)$. $\tilde{\Psi}^{(1)}=:\tilde{\Psi}^{-}=\{\tilde{\psi}_\lambda^{-}|\lambda\in\nabla\}$的具体定义在第三部分.

9.2 向量Sobolev空间的刻画

对n=2, 3和$m\in\mathbf{N}$，定义下列Sobolev空间

$$\vec{H}_0^m(I^n)=:\left\{\vec{u}\in H^m(I^n)^n\,\middle|\,\text{在}\Gamma\text{上}\vec{u}\times\vec{n}=0\text{或}\vec{0}\right\},$$

$$\vec{V}(I^n)=:\vec{H}_0^m(I^n)\cap H(I^n).$$

假设II 假设I中的函数族$\Psi^{(n)}$在$H^m(I^n)^n$规范化下构成空间

$$\widehat{\vec{H}_0^m(I^n)}=\vec{H}_0^m(I^n)\cap\widehat{L^2(I^n)^n}$$

的Riesz基.

基于上述假设可得如下定理.

定理9.2.1 在假设I和假设II下，函数族$\Psi_{\text{curl}}=:\Psi_{\text{curl}}^{(n)}$在$H^m(I^n)^n$规范化下构成$\vec{V}(I^n)$的Riesz基.

证明 因为$H(I^n)=\hat{H}(I^n)=H(I^n)\cap\widehat{L^2(I^n)^n}$，所以对任意的$\vec{u}\in\vec{V}(I^n)$，有$\vec{u}\in\widehat{\vec{H}_0^m(I^n)}$. 由假设I，在$H^m(I^n)^n$下有

$$\vec{u}=\left\langle\vec{u},\tilde{\Psi}^{(n)}\right\rangle_{L^2(I^n)^n}\Psi^{(n)},$$

而且$\|\vec{u}\|_{H^m(I^n)^n}^2\simeq\sum_{\tilde{\psi}\in\tilde{\Psi}^{(n)}}|\langle\vec{u},\tilde{\psi}\rangle_{L^2(I^n)^n}|^2\cdot\|\psi_{\tilde{\psi}}\|_{H^m(I^n)^n}^2$. 进一步，因为$\vec{u}\in H(I^n)$，所以在$H^m(I^n)^n$下有

$$\vec{u}=\left\langle\vec{u},\tilde{\Psi}_{\text{curl}}^{(n)}\right\rangle_{L^2(I^n)^n}\Psi_{\text{curl}}^{(n)},$$

而且$\|\vec{u}\|_{H^m(I^n)^n}^2\simeq\sum_{\tilde{\psi}\in\tilde{\Psi}_{\text{curl}}^{(n)}}|\langle\vec{u},\tilde{\psi}\rangle_{L^2(I^n)^n}|^2\cdot\|\psi_{\tilde{\psi}}\|_{H^m(I^n)^n}^2$.

9.3 小波的构造

本部分给出满足假设I和II的小波构造方法.

引理9.3.1 设函数族$\Psi=\{\psi_\lambda|\lambda\in\nabla\}$和$\tilde{\Psi}=\{\tilde{\psi}_\lambda|\lambda\in\nabla\}$在$L^{2,0}(I)$中双正交. 另外，对某个$m<\gamma<d\in\mathbf{N}$和$2<\tilde{\gamma}<\tilde{d}\in\mathbf{N}$,

$$\inf_{v\in\text{span}\{\psi_\lambda:|\lambda|\leqslant\ell\}}\|u-v\|_{L^2(I)}\lesssim2^{-\ell d}\|u\|_{H^d(I)}\ (u\in\hat{H}^d(I)),$$

$$\inf_{v\in\text{span}\{\tilde{\psi}_\lambda:|\lambda|\leqslant\ell\}}\|u-v\|_{L^2(I)}\lesssim2^{-\ell\tilde{d}}\|u\|_{H^{\tilde{d}}(I)}\ (u\in\hat{H}^{\tilde{d}}(I)),$$

$$\text{对}s<\gamma,\ \text{在span}\{\psi_\lambda\,\|\lambda|\leqslant\ell\}\text{上},\ \|\cdot\|_{H^s(I)}\lesssim2^{\ell s}\|\cdot\|_{L^2(I)}$$

$$\text{对}s<\tilde{\gamma},\ \text{在span}\{\tilde{\psi}_\lambda\,\|\lambda|\leqslant\ell\}\text{上},\ \|\cdot\|_{H^s(I)}\lesssim2^{\ell s}\|\cdot\|_{L^2(I)}.$$

定义函数族$\Psi^{+}=\{\psi_{\lambda}^{+}|\lambda\in\nabla\}$和$\tilde{\Psi}^{-}=\{\tilde{\psi}_{\lambda}^{-}|\lambda\in\nabla\}$为

$$\psi_{\lambda}^{+}(x)=:2^{|\lambda|}\int_{0}^{x}\psi_{\lambda}(y)\,\mathrm{d}y \quad 和 \quad \tilde{\psi}_{\lambda}^{-}(x)=:-2^{-|\lambda|}\dot{\tilde{\psi}}_{\lambda}.$$

则

$$\{2^{-|\lambda|s}\psi_{\lambda}\,|\lambda\in\nabla\}是\hat{H}^{s}(I)的\text{Riesz}基, s\in[0,\gamma),$$

$$\{2^{-|\lambda|s}\tilde{\psi}_{\lambda}\,|\lambda\in\nabla\}是\hat{H}^{s}(I)的\text{Riesz}基, s\in[0,\tilde{\gamma}),$$

$$\{2^{-|\lambda|s}\psi_{\lambda}^{+}\,|\lambda\in\nabla\}是H_{0}^{s}(I)的\text{Riesz}基, s\in[0,\gamma+1),$$

$$\{2^{-|\lambda|s}\tilde{\psi}_{\lambda}^{-}\,|\lambda\in\nabla\}是H^{s}(I)的\text{Riesz}基, s\in[0,\tilde{\gamma}-1),$$

这里，$H_{0}^{s}(I)=:\begin{cases}\left[L^{2}(I),H_{0}^{1}(I)\right]_{s,2}, & s\in[0,1];\\ H^{s}(I)\cap H_{0}^{1}(I), & s\geqslant 1.\end{cases}$ 而且，Ψ^{+}和$\tilde{\Psi}^{-}$是双正交的.

下列结果的证明类似于参考文献[2]中的推论3.7.

推论9.3.1 对$0\leqslant s<\gamma$和$0\leqslant \tilde{s}<\tilde{\gamma}-1$，函数族

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{-\frac{s}{2}}\psi_{\lambda_1}^{+}\otimes\cdots\otimes\psi_{\lambda_k}\otimes\cdots\otimes\psi_{\lambda_n}^{+}:\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^{n}\right\},$$

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{\frac{\tilde{s}}{2}}\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\cdots\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_k}\otimes\cdots\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_n}^{-}:\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\vec{\nabla}=(\nabla)^{n}\right\}$$

分别为

↓第k项

$$H_{0}^{s}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes L^{2,0}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\cap$$

$$\vdots$$

“$\cap$”的第k项 $L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes\hat{H}^{s}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\cap$

$$\vdots$$

$$L^{2}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes L^{2,0}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes H_{0}^{s}$$

和

↓第k项

$$H^{\tilde{s}}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes L^{2,0}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\cap$$

$$\vdots$$

“$\cap$”的第k项 $L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes\hat{H}^{\tilde{s}}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\cap$

$$\vdots$$

$$L^{2}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes L^{2,0}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes H^{\tilde{s}},$$

的Riesz基. 当$s=\tilde{s}=0$时，对应函数族在$L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}\otimes L^{2,0}\otimes L^{2}\otimes\cdots\otimes L^{2}$中双正交.

设$\lambda\in\vec{\nabla}$，定义向量小波

$$\underline{\psi}_{\lambda,k}^{(n)}=:\psi_{\lambda_1}^{+}\otimes\cdots\otimes\psi_{\lambda_k}\otimes\cdots\otimes\psi_{\lambda_n}^{+}\delta_k,\quad \underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,k}^{(n)}=:\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\cdots\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_k}\otimes\cdots\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_n}^{-}\delta_k.$$

利用推论9.3.1和$\widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}$的定义可得

命题9.3.1　对$0\leqslant s<\gamma$和$0\leqslant \tilde{s}<\tilde{\gamma}-1$，函数族

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{\frac{s}{2}}\underline{\psi}_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}\quad 和\quad \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{\frac{\tilde{s}}{2}}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$$

分别是向量空间$\begin{cases}[\widehat{L^2(I^n)^n},\widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}]_{s,2},\ s\in[0,1],\\ \widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}\cap H^s(I^n)^n,\quad s\geqslant 1\end{cases}$和$\widehat{L^2(I^n)^n}\cap H^{\tilde{s}}(I^n)^n$的Riesz基．当$s=\tilde{s}=0$时，对应函数族是$\widehat{L^2(I^n)^n}$中的双正交Riesz基．

下面作基变换，令A^λ是式（8-1）中的正交矩阵．定义

$$\begin{pmatrix}\psi_{\lambda,1}^{(n)}\\ \vdots\\ \psi_{\lambda,n}^{(n)}\end{pmatrix}=:A^\lambda\begin{pmatrix}\underline{\psi}_{\lambda,1}^{(n)}\\ \vdots\\ \underline{\psi}_{\lambda,n}^{(n)}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\tilde{\psi}_{\lambda,1}^{(n)}\\ \vdots\\ \tilde{\psi}_{\lambda,n}^{(n)}\end{pmatrix}=:A^\lambda\begin{pmatrix}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,1}^{(n)}\\ \vdots\\ \underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,n}^{(n)}\end{pmatrix}.$$

令

$$\Psi^{(n)}=:\left\{\psi_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}\quad 和\quad \tilde{\Psi}^{(n)}=:\left\{\tilde{\psi}_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}.$$

利用正交变换的性质可得下列结论．

命题9.3.2　对$0\leqslant s<\gamma$和$0\leqslant \tilde{s}<\tilde{\gamma}-1$，函数族

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{\frac{s}{2}}\psi_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}\quad 和\quad \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{-\frac{\tilde{s}}{2}}\tilde{\psi}_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$$

分别是向量空间$\begin{cases}[\widehat{L^2(I^n)^n},\ \widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}]_{s,2},\ s\in[0,1];\\ \widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}\cap H^s(I^n)^n,\quad s\geqslant 1\end{cases}$和$\widehat{L^2(I^n)^n}\cap H^{\tilde{s}}(I^n)^n$的Riesz基．特别地，当$s=\tilde{s}=0$时，函数族$\Psi^{(n)}$和$\tilde{\Psi}^{(n)}$是$\widehat{L^2(I^n)^n}$的双正交Riesz基．

下面主要考虑$n=2$和$n=3$的情形．

定理9.3.1　令$\Psi_{\text{curl}}^{(n)}=:\left\{\psi_{\lambda,1}^{(n)}\middle|\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$和$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(n)}=:\left\{\tilde{\psi}_{\lambda,k}^{(n)}\middle|2\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$.

（1）$\Psi_{\text{curl}}^{(n)}\subset\hat{H}(I^n)\,(n=2,3)$，$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(2)}\subset\overrightarrow{\text{curl}}\hat{H}^1(I^2)$或$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(3)}\subset\text{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))$.

（2）$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{\frac{m}{2}}\psi_{\lambda,k}^{(n)}\middle|1\leqslant k\leqslant n,\lambda\in\vec{\nabla}\right\}$是向量空间$\widehat{\vec{H}_0^m(I^n)}=:\vec{H}_0^m(I^n)\cap\widehat{L^2(I^n)^n}$的Riesz基．

证明　（1）显然，当$1\leqslant k\leqslant n$时，$\underline{\psi}_{\lambda,k}^{(n)}\in H_0(\text{curl};I^n)$．因此，

$$\psi_{\lambda,1}^{(n)}=\alpha_1\underline{\psi}_{\lambda,1}^{(n)}+\alpha_2\underline{\psi}_{\lambda,2}^{(n)}+\cdots+\alpha_n\underline{\psi}_{\lambda,n}^{(n)}\in H_0(\text{curl};I^n).$$

进一步，$\overrightarrow{\text{curl}}\psi_{\lambda,1}^{(2)}=0, \text{curl}\,\psi_{\lambda,1}^{(3)}=\vec{0}$．从而，$\Psi_{\text{curl}}^{(n)}\subset\hat{H}(I^n)(n=2,3)$．此外，

$$\tilde{\psi}_{\lambda,2}^{(2)}=\alpha_2\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,1}^{(2)}-\alpha_1\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,2}^{(2)}=\begin{pmatrix}\alpha_2\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}^{-}\\-\alpha_1\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{(4^{|\lambda_1|}+4^{|\lambda_2|})^{\frac{1}{2}}}\overrightarrow{\text{curl}}\,\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\in\overrightarrow{\text{curl}}\hat{H}^1(I^2).$$

因此，可得$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(2)}\subset\overrightarrow{\text{curl}}\hat{H}_1(I^2)$．最后，设$a, b, c$是方程

$$\begin{cases}b2^{|\lambda_3|}-c2^{|\lambda_2|}=A_{21},\\-a2^{|\lambda_3|}+c2^{|\lambda_1|}=A_{22},\\-b2^{|\lambda_1|}+a2^{|\lambda_2|}=A_{23},\end{cases}$$

的解，则

$$\tilde{\psi}_{\lambda,2}^{(3)}=A_{21}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,1}^{(3)}+A_{22}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,2}^{(3)}+A_{23}\underline{\tilde{\psi}}_{\lambda,3}^{(3)}=\begin{pmatrix}A_{21}\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\\A_{22}\tilde{\psi}_{\lambda_1}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}^{-}\\A_{23}\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\end{pmatrix}$$

$$=\text{curl}\begin{pmatrix}a\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\\b\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}^{-}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\\c\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\end{pmatrix}\in\text{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3)).$$

类似地，如果a, b, c是方程

$$\begin{cases}b2^{|\lambda_3|}-c2^{|\lambda_2|}=A_{31},\\-a2^{|\lambda_3|}+c2^{|\lambda_1|}=A_{32},\\-b2^{|\lambda_1|}+a2^{|\lambda_2|}=A_{33},\end{cases}$$

的解，则

$$\tilde{\psi}_{\lambda,3}^{(3)}=\text{curl}\begin{pmatrix}a\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\\b\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}\\c\tilde{\psi}_{\lambda_1}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_2}\otimes\tilde{\psi}_{\lambda_3}^{-}\end{pmatrix}\in\text{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3)).$$

因此，$\tilde{\Psi}_{\text{comp}}^{(3)}\subset\text{curl}(\hat{H}_1^1(I^3)\times\hat{H}_2^1(I^3)\times\hat{H}_3^1(I^3))$．

（2）因为$\gamma>m$，在命题9.3.2中取$s=m$，则$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}4^{|\lambda_i|}\right)^{-\frac{m}{2}}\psi_{\lambda,k}^{(n)}\Big|1\leqslant k\leqslant n, \lambda\in\vec{\nabla}\right\}$是$\widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}\cap H^m(I^n)^n$的Riesz基．进一步，容易验证

$$\widehat{\vec{H}_0^1(I^n)}\cap H^m(I^n)^n=\vec{H}_0^m(I^n)\cap\widehat{L^2(I^n)^n}=\widehat{\vec{H}_0^m(I^n)}.$$

参 考 文 献

[1] JIANG Y C, LIU Y M. Interpolatory curl-free wavelete and applications[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2007，5：843-858.

[2] STEVENSON R. Divergence-free wavelet bases on the hypercube: Free-slip boundary conditions, and applications for solving the instationary Stokes equations[J]. Mathematics of Computation, 2011，80：1499-1523.

[3] STEVENSON R. Divergence-free wavelet bases on the hypercube[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2011，30：1-19.

[4] CHUANG Z T, LIU Y M: Spline wavelets with boundary values and vanishing moments[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2011. 9（3）：501-529.

[5] HAROUNA S K, PERRIER V. Divergence-free and curl-free wavelets on the square for numerical simulations[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. WSPC/Instruction file, 2011.

[6] ZHAO J J. Interpolatory Hermite splines on rectangular domains[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010，216：2799-2813.

[7] JIANG Y C, LIU Y M. Adaptive wavelet solution to the Stokes problem[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008，24（4）：613-626.

[8] JIANG Y C. Interpolatory curl-free wavelets on bounded domains and characterization of Besov spaces[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012，68.

[9] JIANG Y C. Anisotropic curl-free wavelets on the unit cube. Acta Mathematicae Sinica[J]. English series, 2012, Doi：10.1007/S10114-012-1604-Z

[10] JIANG Y C. Anisotropic curl-free wavelets with boundary conditions[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012，205.

[11] JIANG Y C. Divergence-free wavelet solution to the Stokes problem[J]. Analysis in Theory and Applications, 2007，23（1）：83-91.

[12] JIANG Y C. Some notes on HM divergence-free multiwavelets[J]. Current Development in Theory and Applications of Wavelets, 2007，1（1）：81-96.

[13] JIANG Y C, ZHANG J. Interval wavelets adapted to divergence-free wavelets with boundary conditions[J]. Current Development in Theory and Applications of Wavelets, 2010，3（3）：249-265.

[14] COHEN A, DAUBECHIES I, FEAUVEAU JC. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm. Prue and Appl. Math, 1992，45：485-560.

[15] DAHMEN W, HAN B, JIA R Q. Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines[J]. Constr, Approx. 2000，16（2）：221-259.

[16] HARDIN D P, MARASOVICH J A. Biorthogonal multi-wavelets on [-1,1].Appl. Comp. Harm. Anal. 1999，7：34-53.

[17] URBAN K. Wavelet bases in H(div) and H(curl)[J]. Mathematics of Computation, 2001，70（234）：739-766.

[18] 龙瑞麟．高维小波分析[M]．北京：世界图书出版公司，1995.

[19] LAKEY J D, PEREYRA M C. Divergence-free multiwavelets on rectangular domains. Wavelet analysis and multiresolution methods(Urbana-Champaign, IL, 1999) [C]// Lecture Notes in Pure and Appl. Math, New York: Marcel Dekker, 2000，212：203-240.

[20] BITTNER K, URBAN K. On interpolatory divergence-free wavelets[J]. Mathematics of Computation, 2007，76：903-929.

[21] LEMARIÉ-RIEUSSET P G. Analyses multi-resolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et derivation et ondelettes vecteurs *à* divergence nulle[J]. Rev. Mat. Iberoamericana, 1992，8（2）：222-237.

[22] URBAN K. Using divergence-free wavelets for the numerical solution of the Stokes problem[J]. In Algebraic Multilevel Iterations, O. Axelsson, B. Pol- man(ed.), Nijmegen, 1996：259-278.

[23] URBAN K. On divergence-free wavelets[J]. Adv. Comput. Math 1995，4：51-82.

[24] BEYLKIN G, COIFMAN R R, ROKHLIN V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms[J]. Comm. Pure and Appl. Math, 1991，44：141-183.

[25] DAHMEN W. Wavelet and multiscale methods for operator equations[M] //Acta Numerica 6. Cambridge: Cambridge University Press, 1997：55-228.

[26] DEVORE R. Nonlinear approximation[M] //Acta Numerica 7. Cambridge: Cambridge University Press, 1998：51-150.

[27] DONOHO D. Interpolating wavelet transforms[R]. Standford: Standford University,1992.

[28] BABUSKA I, RHEINBOLDT W C. Error estimates for adaptive finite element computations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978，15：736-754.

[29] ERIKSSON K, ESTEP D, HANSBO P. Introduction to adaptive methods for differential equations[M] //Acta Numerica 4. Cambridge: Cambridge University Press, 1995：105-158.

[30] DÖRFLER W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996，33：1106-1124.

[31] BANK RE, WEISER A. Some a posteriori error estimates for elliptic partial differential equations[J]. Math, Comp, 1985，44：283-301.

[32] BORNEMANN F, ERDMANN B, KORNHUBER R. A posteriori error estimates for elliptic problems in two and three space dimensions[J]. SIAM J. Numer. Anal, 1996，33：1188-1204.

[33] GIRAULT V, RAVIART PA. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations[M]. 2nd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[34] ELDEN L, BERNTSSON F, REGINSKA T. Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation[J]. SIAM. J. Sci. Comput, 2000，21（6）：2178-2205.

[35] REGINSKA T, ELDEN L. Solving the sideways heat equation by a wavelet-galerkin method[J]. Inverse Problem, 1997，13：1093-1106.

[36] REGINSKA T, ELDEN L. Stability and convergence of a wavelet-galerkin method for the sideways heat equation[J]. J. Inverse Ill-posed Problem, 2000，8：31-49.

[37] REGINSKA T. Sideways heat equation and wavelets[J]. J. Comput. Appl. Math, 1995，63：201-214.

[38] REGINSKA T, ELDEN L. Solving the sideways heat equation by a wavelet-galerkin method[J]. Inverse Problem, 1997，13：1093-1106.

[39] WANG J R. The Multiresolution method to the heat equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005，309（2）：661-673.

[40] DAHLKE S, WEINREICH I. Wavelet-galerkin method: an adapted biorthogonal wavelet basis[J]. Constr. Approx, 1993，9（2）：237-262.

[41] JAWERTH B, SWELDENS W. Wavelets multiresolution analysis adapted for the fast solution of boundary value ordinary differential equations[C]// In Proceedings of the Sixth Copper Mauntain Conference on Multigrid Methods, NASA Conference Publication 3224，1993，259-273.

[42] CHEN Z Y, XU Y S, ZHAO J S. The discrete petrov-galerkin method for weakly singular integral equations[J]. Journal of Integral Equations and Applications, 1999，11（1）：1-35.

[43] CHEN Z Y, XU Y S. The petrov-galerkin and iterated petrov-galerkin methods for second kind integral equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998，35（1）：406-434.

[44] COHEN A, MASSON R. Wavelet adaptive methods for second order elliptic problems: preconditioning and adaptivity[J]. SIAM J. Sci. Comput, 1999，21（3）：1006-1026.

[45] COHEN A, MASSON R. Wavelet adaptive methods for second order elliptic problems: Boundary conditions and domain decomposition[J]. Numer. Math, 2000，86：193-238.

[46] DAHLKE S, DAHMEN W, HOCHMUTH R. Stable multiscale bases and local error estimation for elliptic problems[J]. Applied Numerical Mathematics, 1997，23：21-47.

[47] BARINKA A, BARSCH T, CHARTON P. Adaptive wavelet schemes for elliptic problems — impelementation and numerical experiments[J]. SIAM J. Sci. Comput, 2000，23（3）：910-939.

[48] COHEN A, DAHMEN W, DEVORE R. Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations: convergence rates[J]. Mathematics of Computation, 2001，70（233）：27-75.

[49] DAHLKE S, DAHMEN W, DEVORE R. Nonlinear approximation and adaptive techniques for solving elliptic equations[M]// In multiscale techniques for PDEs, San Diego: Academic Press, 1997：237-284.

[50] VASILYEV O V, KEVLAHAN K R. An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic method for elliptic problems[J]. Journal of Computational Physics, 2005，206：412-431.

[51] DAHMEN W, KUNOTH A. Adaptive wavelet methods for linear-quadratic elliptic control problems: convergence rates[J]. SIAM J. Contr. Optim, 2005，43（5）：1640-1675.

[52] DAHMEN W, KUNOTH A, SCHNEIDER R. Wavelet least squares methods for boundary value problems[J]. SIAM J. Numer. Anal, 2002，39（6）：1985-2013.

[53] COHEN A, DAHMEN W, DEVORE R. Adaptive wavelet methods II — beyond the elliptic case[J]. Found. of Comp. Math, 2002，2：203-245.

[54] DAHLKE S, HOCHMUTH R, URBAN K. Adaptive wavelet methods for Saddle poing problems[J]. Math. Model. Numer. Anal, 2000，34（5）：1003-1022.

[55] DAHLKE S, DAHMEN W, URBAN K. Adaptive wavelet methods for Saddle point problems — optimal convergence rates[J]. SIAM J. Numer. Anal, 2002，40（4）：1230-1262.

[56] DAHMEN W, URBAN K, VORLOEPER J. Adaptive wavelet methods—basic concepts and applications to the stokes problem[M]//ZHOU DX. Wavelet Analysis—Twenty Years Developments. New Jersey: World Scientific, 2002：39-80.

[57] BEYLKIN G, KEISER J M. On the adaptive numerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases[J]. J. of Computational Physics, 1997，132：233-259.

[58] JIANG Y C. Improved error analysis for adaptive wavelet algorithms[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012，8：58.

[59] VENINI P, MORANA P. An adaptive wavelet-galerkin method for an elastic-plastic-damage constructive model: one dimensional problem[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001，90：5619-5638.

[60] COHEN A, DAHMEN W, DeVore R. Adaptive wavelet schemes for non-linear variational problems with convergence rates[J]. SIAM J. Numer. Anal, 2003，41：1785-1823.

[61] COHEN A, HOFFMANN M, REISS M. Adaptive wavelet-galerkin methods for inverse problems[J]. SIAM J. Numer. Anal, 2004，42：1479-1501.

[62] COHEN A. Numerical Analysis of Wavelet Metheds[M]. Amsterdam: Elsevier, 2000.

[63] ALPERT B, BEYLKIN G. Adaptive solution of partial differential equations in multiwavelet bases[J]. J. of Computational Physics, 2002，182：149-190.

[64] BERRONE S, URBAN K. Adaptive wavelet-galerkin method in distorted domains[C]// Setup of the Algebraic System, Nashville: Vanderbilt University Press, 2000.

[65] DAHMEN W. Wavelet methods for PDEs-some recent developments[J]. J. Comp. Appl. Math, 2001，128：133-185.

[66] GIREBEL M, KOSTER F. Adaptive wavelet solvers for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations[M]// MALEK J, NECAS J, ROKYTA M. Advances in Mathematics Fluuid Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[67] KOSTER F, GRIEBEL M, KEVLAHAN N. Towards an adaptive wavelet-based 3D Navier-Stokes solver, Numerical flow simulation I [M]// HIRSCHEL E H. Notes on Numerical Fluid Mechnics. Braunschweig: Vieweg-Verlag, 1998，66：339-364.

[68] WEI C, WANG J Z. Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear PDEs[J]. SIAM J. Numer. Anal, 1996，33（3）：937-970.

[69] DAHMEN W, KUNOTH A, VORLOEPER J. Convergence of adaptive methods for Goal-Oriented error estimation[J]. IGPM Report, RWTH-Aachen, 2006.

[70] DAHMEN W, HARBRECHT H, SCHNEIDER R. Adaptive methods for boundary integral equations-complexity and convergence estimates. IGPM Report, 250, RWTH Aachen, March 2005.

[71] URBAN K. Wavelets in Numerical Simulation [M] Berlin: Springer, 2002.

[72] KEVLAHAN K R, VASILYEV O V. An adaptive wavelet collocation method for fluid-structrue interaction at high Reynolds numbers[J]. SIAM J. Sci. Comput, 2005，26（6）：1984-1915.

[73] JIA R Q, WANG J Z, ZHOU D X. Compactly supported wavelet bases for Sobolev spaces[J]. Appl. Comput. Harmon. Anal, 2003，15：224-241.

[74] BARINKA A. Fast Evalution Tools for Adaptive Wavelet Schemes[D]. Aachen: RWTH Aachen, 2004.

[75] COHEN A, DAHMEN W, DEVORE R. Sparse evaluation of compositions of functions using multiscale expansions[J]. SIAM J. Math. Anal, 2003，35：279-303.

[76] BERTOLUZZA S, CANUTO C, URBAN K. On the adaptive computation of integrals of wavelets[J]. Appl. Numer. Math, 2000，34（1）：13-38.

[77] BARINKA A, BARSCH T, DAHLKE S. Some remarks on quadrature formulas for refinable functions and wavelets[J]. ZAMM 81, 2001，12：839-855.

[78] BARINKA A, DAHMEN W, SCHNEIDER R. Fast computation of adaptive wavelet expansions[R]. Aachen: RWTH Aachen, 2004.

[79] BARINKA A, DAHLKE S, DAHMEN W. Adaptive application of operators in standard representation[R]. Aachen: RWTH Aachen, 2003.

[80] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets[M]// The Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia: Captial City Press, 1992.

[81] COHEN A, DAUBECHIES I, VIAL P. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms[J]. Appl. Comp. Harm. Anal, 1993，1：54-81.

[82] DAHMEN W, SCHNEIDER R. Composite wavelet bases for operator equations[J]. Math. Comp, 1999，68：1533-1567.

[83] DAHMEN W, SCHNEIDER R. Wavelets on manifolds I: construction and domain decomposition[J]. SIAM J. Math. Anal, 1999，31：184-230.

[84] MASSON R. Biorthogonal spline wavelets on the interval for the resolution of boundary problems[J]. Math. Models Appl. Sci 1996,6（6）:749-791.

[85] DAHMEN W, STEVENSON R. Element-by-element construction of wavelets—stability and moment conditions[J]. SIAM J. Numer. Anal, 1999，37：319-325.

[86] NGUYEN H, STEVENSON R. Finite element wavelets on manifolds[J]. SIMA J. Numer. Anal, 2003，23（1）：149-173.

[87] DAHMEN W, KUNOTH A, URBAN K. Biorthogonal splines wavelets on the interval—stability and moment conditions[J]. Appl. Comp. Harm. Anal, 1999，6：132-196.

[88] FRAZIER M W. An Introduction To Wavelets Through Linear Algebra[M]. Berlin: Springer,1999.

[89] DAHLKE S, DEVORE R. Besov regularity for elliptic boundary value problems[J]. Commun. in PDE, 1997，22：1-16.

[90] DAHLKE S. Besov regularity for elliptic boundary value problems on polygonal domains[J]. Appl. Math. Lett, 1999，12：31-36.

[91] BINEV P, DAHMEN W. Approximation classes for adaptive methods[J]. J. Serdica Math, 2002，28：1002-1026.

[92] TEMAN R. Navier-Stokes Equations[M]. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[93] BATTLE G, FEDERBUSH P. Divergence-free vector wavelets[J]. Michigan Math.J, 1993，40（1）：181-195.

[94] LEMARIÉ-RIEUSSET PG. Un théorem d'inexistence pour les ondelettes vecteurs à divergence nulle[J]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, 1994，319：811-813.

[95] DERIAZ E, PERRIER V. Direct numerical simulation of turbulence using divergence-free wavelets[J]. Multiscale Model, 2008，7（3）：1101-1129.

[96] LAKEY J, MASSOPUST P, PEREYRA M. Divergence-free multiwavelets[J]. Approximation Theory IX, 1998，2：161-168.

[97] STRELA V. Multiwavelets: Theory and Applications[D]. Combridge: MIT, 1996.

[98] ALBUKREK C M, URBAN K, DAHMEN W. Divergence-free wavelet analysis of turbulent flows[j]. J. of Scientific Computing, 2002，17（1）：49-66.

[99] DERIAZ E, PERRIER V. Towards a divergence-free wavelet method for the simulation of 2D/3D turbulent flows [J]. Journal of Turbulence, 2006，7，37.

[100] KO J, KURDILA A J, REDINIOTIS O K. Divergence-free bases and multiresolution methods for Reduced-Order flow modeling[J]. AIAA Journal, 2000，38（2）：2219-2232.

[101] FARGE M. Wavelet transforms and their applications to turbulence[J]. Ann. Rev. Flu. Mech, 1992，5：395-457.

[102] BENZI R, VERGASSOLA M. Optimal wavelet transform and its application to two-dimensional turbulence[J]. Fluid Dyn. Res, 1991，8：117-126.

[103] DEBNATH L. Wavelet Transforms and Their Applications[M]. Birkhauser, 2002.

[104] WEISS J. Wavelets and the study of two-dimensional trubulence[C]// Maday Y. In the Proceedings of the French-USA workshop on wavelets and turbulence, Princeton University, June 1991, New York: Springer-Verlag, 1992，158-179.

[105] 赵凯华，陈谋．电磁学[M]．北京：人民教育出版社，1978.

[106] 刘斯铁尔尼克JI A，索伯列夫BN．泛函分析概要[M]．第二版．北京：科学出版社，1985.

[107] BRAMBLE J H, PASCIAK J E. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations for elliptic problems[J]. Math. Comp, 1988，50：1-17.

[108] BERGH J, LOFSTROM J. Interpolation Spaces[M]. Berlin: Springer, 1976.

[109] JIA R Q. Bessel sequences in Sobolev spaces[J]. Appl. Comput. Harmon. Anal, 2006，20：298-311.

[110] HÁRDLE W, KERKYACHARIAN G, PICARD D. Wavelets, Approximation and Statiscal Applications[M]. New York: Springer, 1998.

[111] 伍卓群，尹景学，王春朋．椭圆与抛物型方程引论[M]．北京：科学出版社，2003.

[112] 程云鹏．矩阵论[M]．第二版．西安：西北工业大学出版社，2003.

[113] 王元明，徐君祥．索伯列夫空间讲义[M]．南京：东南大学出版社，2003.

[114] DERIAZ E, PERRIER V. Orthogonal Helmholtz decomposition in arbitrary dimension using divergence-free and curl-free wavelets[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009，26（2）：249-269.

[115] 蒋英春，刘有明．离散空间中正交小波系的完备性[J]．数学学报，2006，49（5）：1075-1085.

[116] 蒋英春，刘勇．离散正交小波的性质兼容性[J]．北京工业大学学报，2006，32（4）：375-379.

[117] GRIEBEL M, OSWALD P. Tensor product type subspace splittings and multi-level iterative methods for anisotropic problems[J]. Adv. Comput. Math, 1995，4：171-206.

[118] DIJKEMA T J. Adaptive tensor product wavelet methods for solving PDEs[D]. Utrecht: Utrecht University, 2009.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□□□
□□=□□□□
□□=108
SS□=13216532
DX□=
□□□□=2012.12
□□□=□□□□□□□